

Control de la posición de una bola sobre una barra basculante

Antonio Romeo Tello - Agustín Felipe Vela Escolano

Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Industrial. Universidad de Zaragoza.

Corona de Aragón, 42.50009 Zaragoza.

Tlfno 976351609-ext13 Fax 976762189. E-mail: romeo@posta.unizar.es

Resumen

Se pretende resolver, con fines educativos, el clásico problema del control de la posición de una bola sobre una barra basculante, cuya inclinación se puede modificar mediante un motor de corriente continua acoplado en el centro de la barra. El artículo muestra un estudio completo del problema a resolver, suministrándose desde algunas pautas para su realización como equipo de laboratorio, hasta la evaluación de 2 estrategias diferentes de control basadas ambas en una descripción del sistema en el espacio de estado.

1. Introducción

Probablemente los dos ejemplos más clásicos de sistemas inestables presentados en el estudio de teoría de control sean la *bola sobre la barra basculante* y el *péndulo invertido*. El control de los mismos se aborda de diversas formas y permiten evaluar las diferentes estrategias utilizadas. Esta evaluación suele realizarse a nivel de simulación mediante un modelo matemático notablemente simplificado que en el caso que nos ocupa se traduce en la no consideración de algunas no linealidades:

- Saturación de la acción debida a la limitación del valor de la tensión que se puede aplicar al motor.
- Fricción seca de Coulomb en el motor y en reductor
- Relación senoidal entre el ángulo de la barra y la aceleración lineal de la bola: es de la forma $a = K \cdot \sin(\alpha)$, siendo α el ángulo de la barra.
- Juego angular en el reductor existente entre el motor y la barra (4 grados en eje lento), que supone una dificultad añadida en el control del ángulo de la barra.
- Par resistente sobre el motor debido tanto al peso de la bola cuando ésta no se halla en el punto medio.

La realización de una maqueta real del sistema permite comparar los resultados teóricos obtenidos a nivel de simulación con los prácticos derivados de la aplicación de los algoritmos de control elaborados a partir del modelado *idílico* del sistema antes mencionado.

2. Elección de los sensores

Posición de la bola sobre la barra: la forma más sencilla y eficiente de que el movimiento de la bola sobre la barra sea lo más perfecto posible es hacer que ésta ruede sobre dos

cables suficientemente tensados, solidarios a la barra. Este sistema además facilita el diseño de un transductor de posición a tensión, si se usan materiales eléctricamente conductores tanto para los cables como para la bola. Dichos cables propician el uso de un método de cursor, consistente en utilizar uno de los cables resistivo y alimentado con una tensión bipolar y el otro con la menor resistencia posible, de manera que al hacer contacto la bola con los dos cables se obtiene directamente una tensión que indica la posición en la que se encuentra la bola.

Velocidad de la bola: es complejo diseñar un sensor sencillo y suficientemente preciso que mida directamente la velocidad de la bola. Una forma de obtenerla sería derivando la salida de sensor de posición. Sin embargo esta solución conviene evitarla, ya que la diferenciación de una señal siempre disminuye considerablemente la relación señal-ruido, debido a que éste generalmente fluctúa con mayor rapidez que la señal. Por tanto deja de ser práctica su implementación.

Posición angular de la barra: la forma más sencilla y eficiente de implementar un sensor angular es utilizar un potenciómetro sin fin, que alimentado con una tensión bipolar adecuada, da como salida una tensión relacionada directamente con el ángulo medido.

velocidad angular de la barra: el típico sensor de velocidad de un motor es un dínamo tacométrica acoplada al eje del motor, cuya salida es una tensión proporcional a la velocidad del motor. No obstante, hay otra forma más económica de implementarlo electrónicamente. El sistema se basa en la relación existente entre: la tensión de inducido, la fuerza contraelectromotriz y la corriente de inducido, y en la relación entre la velocidad del motor y la fuerza contraelectromotriz, tal como muestra la figura 1:

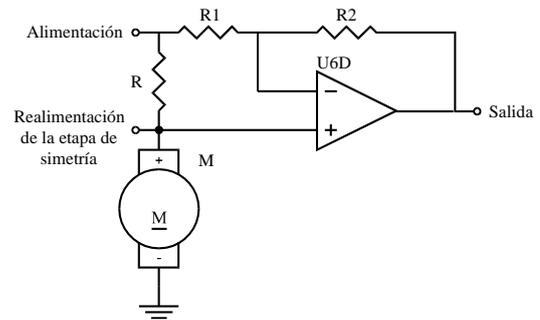


Fig. 1. Dínamo electrónica

Con este esquema, y suponiendo la resistencia de shunt de valor 1Ω , la tensión de salida de la etapa será:

$$V_0 = U_b - \frac{(U_b + R_{shunt} \cdot I_i) - U_b}{R_1} \cdot R_2 =$$

$$= U_b - \frac{R_2}{R_1} \cdot R_{shunt} \cdot I_i = U_b - R_i \cdot I_i = E$$

De esta forma obtenemos como tensión de salida la fuerza contraelectromotriz, y por tanto la velocidad del motor.

3. Identificación del sistema

Para una sencilla identificación no paramétrica del sistema se hace necesario dividir el sistema en los dos subsistemas que lo integran:

- El subsistema formado por el motor y la barra, cuya entrada es la tensión de inducido del motor y cuya salida es el ángulo de la barra.
- El subsistema formado por la barra y la bola, cuya entrada es el ángulo de la barra y cuya salida es la posición de la bola.

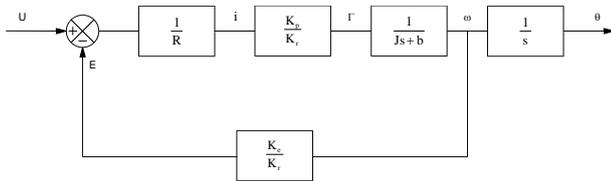


Fig. 2. Subsistema motor-barra

Aprovechando la existencia del sensor de velocidad angular del motor se puede identificar el primer subsistema (de primer orden), sin más que aplicar un escalón en bornas del motor y observar la salida de la dínamo electrónica en el osciloscopio, obteniéndose la siguiente función de transferencia:

$$\frac{\omega(s)}{U(s)} = \frac{K}{1 + \tau s} = \frac{0.8}{1 + 0.1333s}$$

Teniendo en cuenta que la constante asociada a la dínamo electrónica es la constante eléctrica del motor $K_e = 367 \text{ rpm}/\sqrt{V} = 38.4321 \text{ rad/s}/\sqrt{V}$ y que la barra está acoplada al motor a través de un reductor 1:125 tenemos:

$$G_1(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{0.8 \cdot K_e / 125}{(1 + 0.1333s) \cdot s} = \frac{1.8447}{s \cdot (s + 7.5)} = \frac{K}{s \cdot (s + a)}$$

El segundo subsistema presenta una mayor dificultad para su identificación debido a que sólo disponemos del sensor de posición de la bola para su identificación. La función de transferencia de este sistema es un sistema de segundo orden con los dos polos en el origen:

$$G_2(s) = \frac{X(s)}{\theta(s)} = \frac{K_a}{s^2}$$

Para determinar la constante K_a que define el sistema G_2 , de forma experimental, se realiza un ensayo, fijando un ángulo de inclinación para la barra de 0.05 radianes y dejando que la bola se desplace de un extremo a otro de la

barra habiendo partido del reposo.. El valor obtenido para la constante es 3.6383.

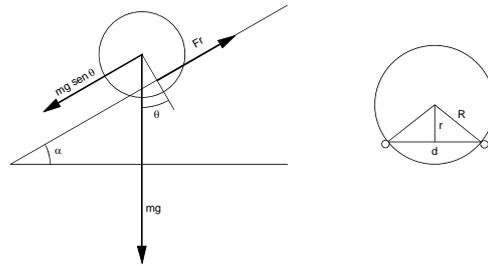


Fig. 3. Subsistema barra-bola

4. Cálculo del controlador

4.1. Modelado del sistema

Partiendo de las ecuaciones diferenciales que definen el sistema en el dominio del tiempo. Se elige el siguiente conjunto de variables de estado:

$$x_1 = \theta \quad x_2 = \frac{d\theta}{dt} = \dot{x}_1$$

$$x_3 = x \quad x_4 = \frac{dx}{dt} = \dot{x}_3$$

Expresando estas ecuaciones diferenciales en forma matricial y sustituyendo valores se obtiene:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3.6383 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.8447 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0] \quad D = [0]$$

4.2. Observador de la velocidad de la bola

El método de imposición de polos requiere que todas las variables de estado sean medibles y estén disponibles para la realimentación. En nuestro caso la velocidad de la bola no es directamente medible, por lo que para diseñar el regulador por el método de imposición de polos es necesario diseñar un observador que estime esta variable de estado. Dividiendo el vector de estado en las dos partes, la medible y la no medible, las ecuaciones de estado quedan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x_m(k+1) \\ x_o(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fs_{mm} & Fs_{mo} \\ Fs_{om} & Fs_{oo} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_o(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Gs_m \\ Gs_o \end{bmatrix} \cdot u(k)$$

$$y(k) = [I \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_m(k) \\ x_o(k) \end{bmatrix}$$

La matriz que caracteriza la dinámica del error del observador es

$$M = Fs_{oo} - K_e \cdot Fs_{mo} = 1 - K_e \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

El polo del observador se elige de forma que su dinámica sea cuatro veces más rápida que el sistema regulado. Luego si el sistema regulado tiene un tiempo de respuesta tr con un polo real doble dominante, el valor de K_e será:

$$K_e = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \left(1 - e^{\frac{-4.75}{tr/4} \cdot 0.1} \right) \cdot 10 \end{bmatrix}$$

Los distintos valores de K_e en función del tiempo de respuesta se expresan en la siguiente tabla:

tr	2	3	4	5	6	7
K_e	6.1326	4.6918	3.7811	3.1614	2.7143	2.3771

Tabla 1. Ganancia del observador de velocidad

4.3. Cálculo del regulador por realimentación lineal de estado

El diagrama de bloques del conjunto regulador-sistema es el siguiente:

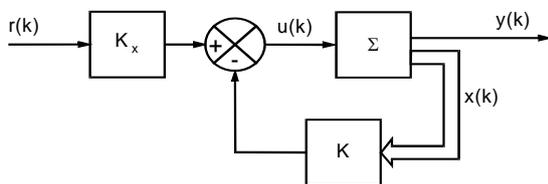


Fig. 4: Esquema control por realimentación lineal de estado

El sistema es de cuarto orden por lo que hay que imponer los cuatro polos del sistema. Tomando como especificación que la sobreoscilación sea nula, podemos ubicar los polos del sistema de forma que la dinámica del sistema se ajuste a la de un sistema de segundo orden con un polo real doble dominante y dos polos dominados (con una dinámica diez veces más rápida). Luego fijando un tiempo de respuesta tr , los polos deseados serán:

$$p = e^{\frac{-4.75}{tr} \cdot 0.1} \quad pd = e^{\frac{-4.75}{tr}}$$

Aplicando la fórmula de Ackermann, los distintos valores de los elementos de K en función del tiempo de respuesta se expresan en la siguiente tabla:

tr	2	2.5	3	3.5	4
K_1	77.8367	45.8498	28.6726	18.8042	12.8220
K_2	78.6444	56.6142	41.8983	31.7616	24.5896
K_3	93.6730	80.4085	69.2961	60.0441	52.3513
K_4	7.3188	6.7669	6.2324	5.7238	5.2457

Tabla 2. Ganancias en función del tiempo de respuesta

Como se aprecia en la tabla cuanto menor es el tiempo de respuesta más altos resultan los valores de las constantes de realimentación. Cuanto más altas son las constantes más sensible es el sistema ante la presencia de ruidos en la realimentación, por lo que hay que llegar a una solución de compromiso a la hora de elegir el tiempo de respuesta. Experimentalmente se comprueba que un tiempo de respuesta de 3.5 segundos da buenos resultados. Se ha

utilizado una entrada de referencia de tipo senoidal para evitar picos en la acción, con $tr=3.5$ segundos. Así mismo se ha considerado la existencia de fricción seca en eje de motor.

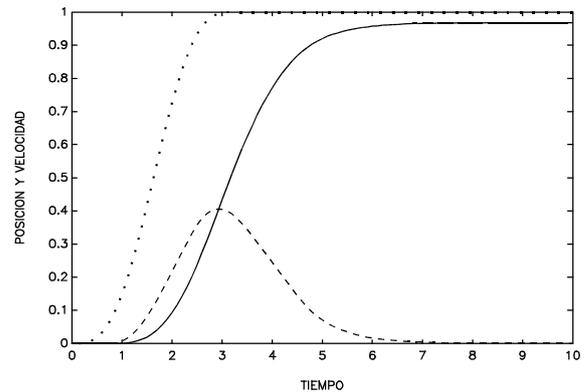


Fig. 5: Referencia, posición y velocidad para $tr=3.5$ seg.

4.4. Cálculo del regulador con integrador

Debido a la fricción seca de Coulomb presente en el motor, con un regulador basado en realimentación lineal del estado el error de posición no es nulo. Para conseguir que el error de posición sea nulo hay que incluir un integrador en el diseño del regulador, lo que mejora el régimen permanente a costa de empeorar el régimen transitorio. Con la inclusión del integrador también se consigue eliminar el efecto de las perturbaciones en el régimen permanente. El diagrama de bloques del conjunto regulador-sistema es el siguiente:

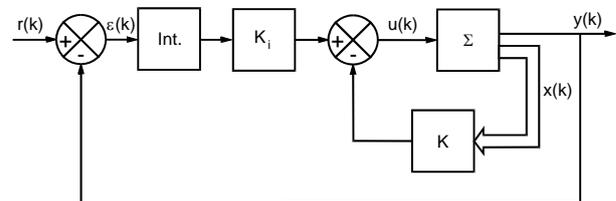


Fig. 4: Esquema control con integrador

Ubicando los polos del sistema de forma que la dinámica del sistema se ajuste a la de un sistema de segundo orden con un polo real doble y tres polos dominados, y fijando un tiempo de respuesta tr , los polos deseados serán:

$$p = e^{\frac{-4.75}{tr} \cdot 0.1} \quad pd = e^{\frac{-4.75}{tr}}$$

Las matrices que modelan el conjunto sistema - regulador, siendo $x_s(k)$ el estado del sistema y $x_i(k)$ el estado del integrador:

$$\begin{bmatrix} x_s(k+1) \\ x_i(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fs & 0 \\ -Gs_i \cdot C & Fs_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_s(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Gs \\ 0 \end{bmatrix} \cdot u(k) + \begin{bmatrix} 0 \\ Gs_r \end{bmatrix} \cdot r(k)$$

$$y(k) = \begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_s(k) \\ x_i(k) \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula de Ackermann, se obtienen los distintos valores de los elementos de K en función del tiempo de respuesta, mostrados en la tabla 2. Los resultados de la simulación mostrados en la figura 6 corresponden al caso con tiempo de respuesta de 6 seg.

tr	3	4	5	6	7
K_1	361.6430	183.7239	101.8628	60.5961	38.1514
K_2	176.6126	116.0502	79.1575	55.9736	40.8615
K_3	124.6055	99.3881	80.2440	65.7531	54.6721
K_4	8.2114	7.26441	6.4033	5.6358	4.9562
K_i	-22.7864	-8.9115	-4.0106	-2.0065	-1.0897

Tabla 3. Ganancias en función del tiempo de respuesta

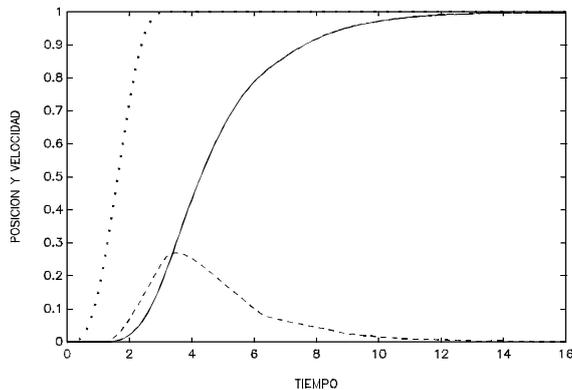


Fig. 6: Referencia, posición y velocidad para $t_r=6$ seg.

5. Resultados prácticos

En la figura 7 se muestra la gráfica de la referencia, posición y velocidad de la bola para un cambio de referencia desde -35 cm hasta 0 cm con una estrategia de control por realimentación lineal de estado diseñada para $t_r=3.5$ seg. Se observa que la bola se ha detenido en un punto para el cual la acción reguladora es lo suficientemente pequeña como para que el par motor no sea capaz de vencer los pares resistentes debidos a fricción seca de Coulomb.

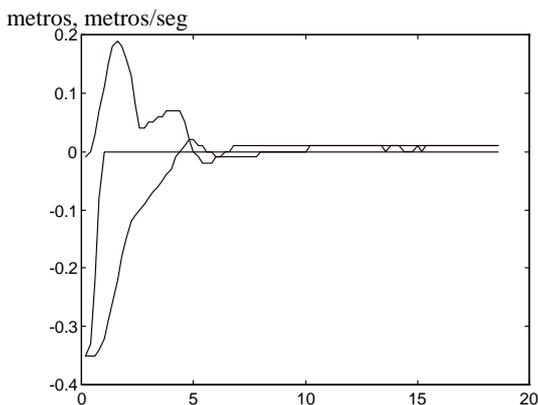


Fig. 7: Referencia, posición y velocidad para $t_r=6$ seg. Con integrador.

En la figura 8 se muestran las gráficas para la posición y la velocidad de la bola en el caso de un cambio de referencia desde -30 cm a 30 cm, utilizando el regulador con integrador con $t_r=6$ seg. En ella se aprecia un comportamiento oscilante del sistema que las simulaciones no mostraban. Este comportamiento viene determinado por la propia estrategia de control, que no permite llegar a una situación de bola parada. Si en algún momento la bola se

para, a buen seguro que lo hará con un ligerísimo error respecto a la posición de referencia, lo que hará que la integral de ese error crezca en módulo hasta que el par motor supere los pares de fricción seca existentes, y “continúe el baile”.

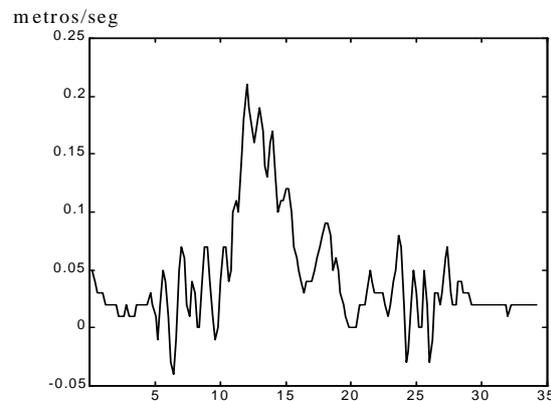
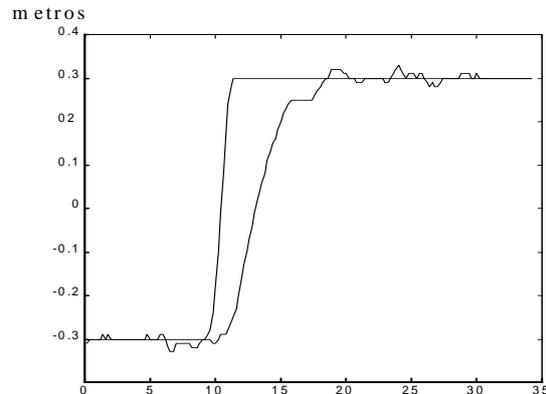


Fig. 8: Referencia, posición y velocidad para $t_r=6$ seg. Con integrador.

6. Conclusiones

Como ya se apreciaba en simulación, el controlador sin integrador permite llegar al régimen permanente con error de posición debido a los pares perturbadores de fricción seca. Para conseguir error nulo se hace necesaria la adición del integrador, si bien el comportamiento real se hace más oscilante. Estos resultados se alejan de los obtenidos en simulación por varios factores:

- Imprecisión del modelo matemático que entre otras aproximaciones obvia el juego angular existente.
- La estrategia de control puede contribuir como se ha visto, a que el sistema se comporte de forma oscilante.

Bibliografía

- KATSUHIKO OGATA: “Discrete-Time Control Systems”. Prentice Hall 1987.
- CHARLES L. PHILLIPS, H. TROY NAGLE, Jr.: “Sistemas de control digital. Análisis y diseño”. Gustavo Gili. 1987
- STUART BENNET: “Real-Time Computer Control”. Prentice Hall 1994