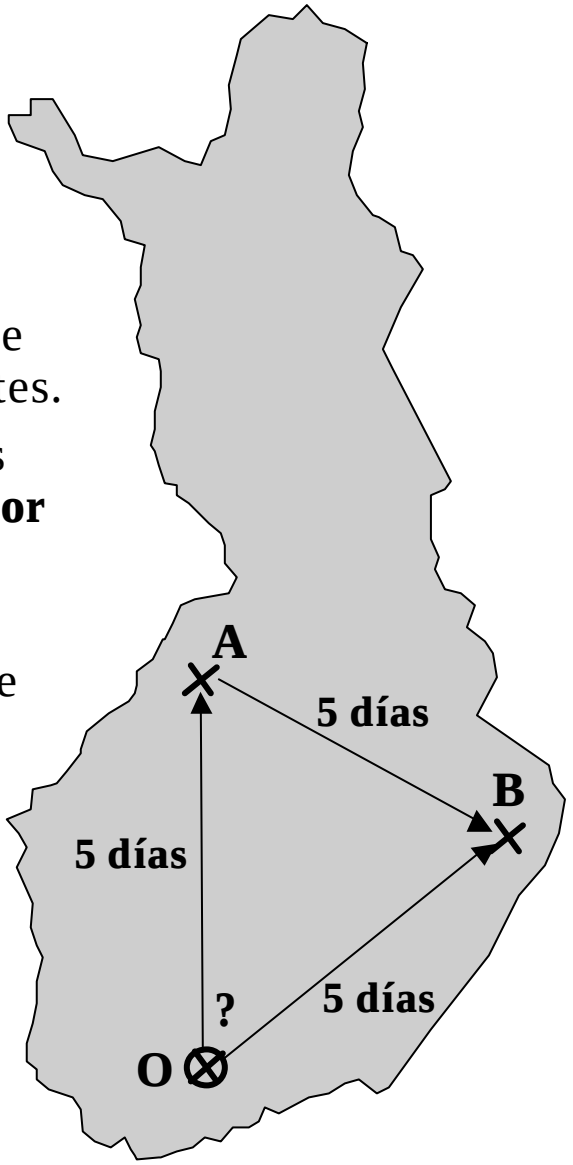
4 Algoritmos probabilistas

4 Algoritmos probabilistas: Introducción

- Una historia sobre un tesoro, un dragón, un computador, un elfo y un doblón.
  - En A o B hay un **tesoro** de *x* lingotes de oro pero no sé si está en A o B.
  - Un **dragón** visita cada noche el tesoro llevándose *y* lingotes.
  - Sé que si permanezco 4 días más en O con mi **computador** resolveré el misterio.
  - Un **elfo** me ofrece un trato: Me da la solución ahora si le pago el equivalente a la cantidad que se llevaría el dragón en 3 noches.

¿Qué debo hacer?



4 Algoritmos probabilistas: Introducción

– Si me quedo 4 días más en O hasta resolver el misterio, podré llegar al tesoro en 9 días, y obtener x-9y lingotes.

– Si acepto el trato con el elfo, llego al tesoro en 5 días, encuentro allí x-5y lingotes de los cuales debo pagar 3y al elfo, y obtengo x-8y lingotes.

Es mejor aceptar el trato pero…

… ¡hay una solución mejor!

¿Cuál?

4 *Algoritmos probabilistas: Introducción*

– ¡Usar el **doblón** que me queda en el bolsillo!

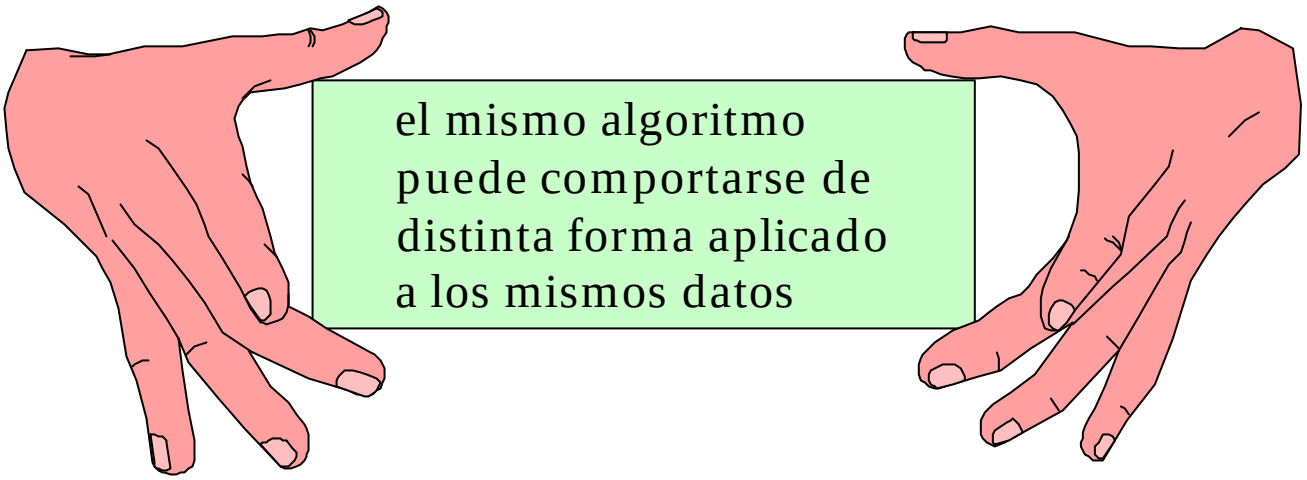
– Lo lanzo al aire para decidir a qué lugar voy primero (A o B).

- Si acierto a ir en primer lugar al sitio adecuado, obtengo x-5y lingotes.
- Si no acierto, voy al otro sitio después y me conformo con x-10y lingotes.

→ El beneficio esperado medio es x-7’5y.

4 Algoritmos probabilistas: Introducción

- ¿Qué hemos aprendido?
  - En algunos algoritmos en los que aparece una decisión, es preferible a veces elegir aleatoriamente antes que perder tiempo calculando qué alternativa es la mejor.
  - Esto ocurre si el tiempo requerido para determinar la elección óptima es demasiado frente al promedio obtenido tomando la decisión al azar.
- Característica fundamental de un algoritmo probabilista:



4 Algoritmos probabilistas: Introducción

- Más diferencias entre los algoritmos deterministas y probabilistas:
  - A un algoritmo determinista **nunca** se le permite que no termine: hacer una división por 0, entrar en un bucle infinito, etc.
  - A un algoritmo probabilista se le puede permitir siempre que eso ocurra con una **probabiliad muy pequeña** para datos cualesquiera.
    - Si ocurre, se aborta el algoritmo y se repite su ejecución con los mismos datos.
  - Si existe más de una solución para unos datos dados, un algoritmo determinista siempre encuentra la **misma solución** (a no ser que se programe para encontrar varias o todas).
  - Un algoritmo probabilista puede encontrar **soluciones diferentes** ejecutándose varias veces con los mismos datos.

4 Algoritmos probabilistas: Introducción

- Más diferencias:

  - A un algoritmo determinista no se le permite que calcule una solución incorrecta para ningún dato.
  - Un algoritmo probabilista puede equivocarse siempre que esto ocurra con una probabilidad pequeña para cada dato de entrada.
    - Repitiendo la ejecución un número suficiente de veces para el mismo dato, puede aumentarse tanto como se quiera el grado de confianza en obtener la solución correcta.

  - El análisis de la eficiencia de un algoritmo determinista es, a veces, difícil.
  - El análisis de los algoritmos probabilistas es, muy a menudo, muy difícil.

4 Algoritmos probabilistas: Introducción

- Un comentario sobre “el azar” y “la incertidumbre”:

  - A un algoritmo probabilista se le puede permitir calcular una solución equivocada, con una probabilidad pequeña.
  - Un algoritmo determinista que tarde mucho tiempo en obtener la solución puede sufrir errores provocados por fallos del hardware y obtener una solución equivocada.

    → Es decir, el algoritmo determinista tampoco garantiza siempre la certeza de la solución y además es más lento.

  - Más aún:

    Hay problemas para los que no se conoce ningún algoritmo (determinista ni probabilista) que dé la solución con certeza y en un tiempo razonable (por ejemplo, la duración de la vida del programador, o de la vida del universo…):

    Es mejor un algoritmo probabilista rápido que dé la solución correcta con una cierta probabilidad de error.

    Ejemplo: decidir si un nº de 1000 cifras es primo.

4 Algoritmos probabilistas: Clasificación

Algoritmos que no garantizan la corrección de la solución

Algoritmos numéricos:

- dan una solución aproximada
- dan un intervalo de confianza ("con probab. del 90% la respuesta es 33 ± 3")
- a mayor tiempo de ejecución, mejor es la aproximación

Algoritmos de Monte Carlo:

- dan la respuesta exacta con una alta probabilidad
- en algunas ocasiones dan una respuesta incorrecta
- no se puede saber si la respuesta es la correcta
- se reduce la probabilidad de error alargando la ejecución

Algoritmos que nunca dan una solución incorrecta

Algoritmos de Las Vegas:

- toman decisiones al azar
- si no encuentran la solución correcta lo admiten
- es posible volver a intentarlo con los mismos datos hasta obtener la solución correcta

4 Algoritmos probabilistas: Clasificación

- Ejemplo de comportamiento de los distintos tipos ante un mismo problema

  "¿Cuándo descubrió América Cristobal Colón?"

  – Algoritmo numérico ejecutado cinco veces:

    - "Entre 1490 y 1500."
    - "Entre 1485 y 1495."
    - "Entre 1491 y 1501."
    - "Entre 1480 y 1490."
    - "Entre 1489 y 1499."

    Aparentemente, la probabilidad de dar un intervalo erroneo es del 20% (1 de cada 5).

    Dando más tiempo a la ejecución se podría reducir esa probabilidad o reducir la anchura del intervalo (a menos de 11 años).

4 Algoritmos probabilistas: Clasificación

"¿Cuándo descubrió América Cristobal Colón?"

– Algoritmo de Monte Carlo ejecutado diez veces:

1492, 1492, 1492, 1491, 1492, 1492, 357 A.C., 1492, 1492, 1492.

De nuevo un 20% de error.

Ese porcentaje puede reducirse dando más tiempo para la ejecución.

Las respuestas incorrectas pueden ser próximas a la correcta o completamente desviadas.

4 Algoritmos probabilistas: Clasificación

"¿Cuándo descubrió América Cristobal Colón?"

– Algoritmo de Las Vegas ejecutado diez veces:

  1492, 1492, ¡Perdón!, 1492, 1492, 1492, 1492, 1492, ¡Perdón!, 1492.

  El algoritmo nunca da una respuesta incorrecta.

  El algoritmo falla con una cierta probabilidad (20% en este caso).

4 Algoritmos numéricos: Introducción

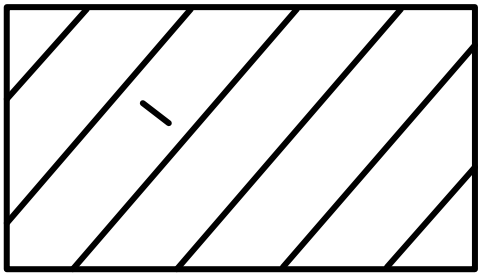
- Primeros en aparecer
  - SGM, clave “Monte Carlo”
- Un ejemplo ya conocido:
  - Simulación de un sistema de espera (cola)
    - Estimar el tiempo medio de espera en el sistema.
    - En muchos casos la solución exacta no es posible.
- La solución obtenida es siempre aproximada pero su precisión esperada mejora aumentando el tiempo de ejecución.
- Normalmente, el error es inversamente proporcional a la raíz cuadrada del esfuerzo invertido en el cálculo
  - Se necesita cien veces más de trabajo para obtener una cifra más de precisión.

4 Algoritmos numéricos: La aguja de Buffon

G.L. Leclerc, Conde de Buffon:
"Essai d'arithmétique morale", 1777.

❖ Teorema de Buffon:

Si se tira una aguja de longitud λ a un suelo hecho con tiras de madera de anchura ω ($\omega \geq \lambda$), la probabilidad de que la aguja toque más de una tira de madera es $p = 2\lambda / \omega p$.



❖ Aplicación:

- Si $\lambda = \omega / 2$, entonces $p = 1 / p$.
- Si se tira la aguja un número de veces n suficientemente grande y se cuenta el número k de veces que la aguja toca más de una tira de madera, se puede estimar el valor de p:

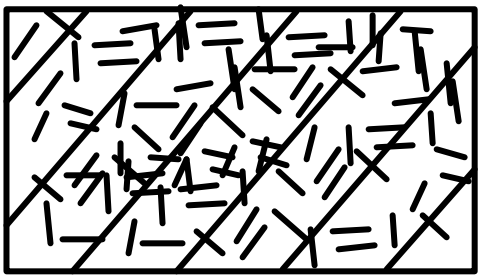
$$k \approx n / p \Rightarrow p \approx n / k$$

Es (probablemente) el primer algoritmo probabilista de la historia.

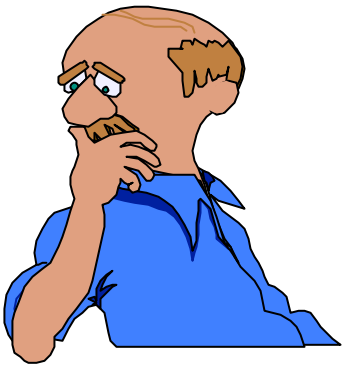
4 Algoritmos numéricos: La aguja de Buffon

- Pregunta natural: ¿Es útil este método?
  - ¿Cómo de rápida es la convergencia?
    Es decir, ¿cuántas veces hay que tirar la aguja?

    Es muy lenta, es decir el método no sirve [BB96]:
    n=1500000 para obtener un valor de p±0’01 con probabilidad 0’9.



p≈3±0’5, con probabilidad 0’85

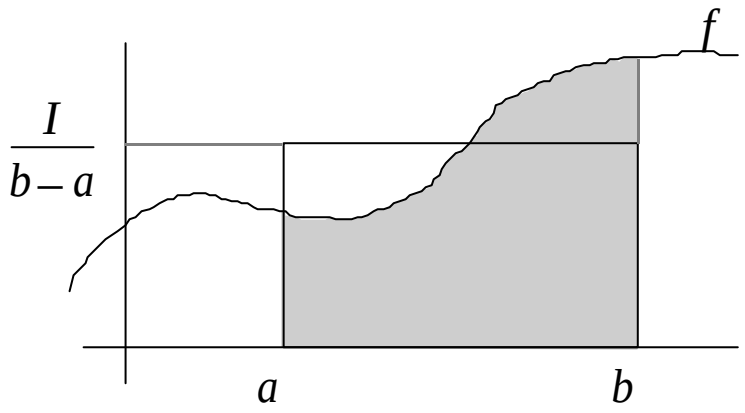


4 Algoritmos numéricos: Integración probabilista

- Problema:

  Calcular:

  $I = \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x$, donde $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ es continua y $a \leq b$



  $I/(b\text{-}a)$ es la altura media de f entre a y b.

4 Algoritmos numéricos: Integración probabilista

```
función int_prob(f:función; n:entero;
                 a,b:real) devuelve real
{Algoritmo probabilista que estima la integral
 de f entre a y b generando n valores aleatorios
 x_i en [a,b), haciendo la media de los f(x_i) y
 multiplicando el resultado por (b-a).
 Se utiliza la función uniforme(u,v) que genera
 un número pseudo-aleatorio uniformemente
 distribuido en [u,v).}
variables suma,x:real; i:entero
principio
  suma:=0.0;
  para i:=1 hasta n hacer
    x:=uniforme(a,b);
    suma:=suma+f(x)
  fpara;
  devuelve (b-a)*(suma/n)
fin
```

4 Algoritmos numéricos: Integración probabilista

- Análisis de la convergencia:
  - Puede verse [BB96] que la varianza del estimador calculado por la función anterior es inversamente proporcional al número *n* de muestras generadas y que la distribución del estimador es aproximadamente *normal*, cuando *n* es grande.
  - Por tanto, el error esperado es inversamente proporcional a $\sqrt{n}$.
    - 100 veces más de trabajo para obtener una cifra más de precisión

4 Algoritmos numéricos: Integración probabilista

- La versión determinista:
  - Es similar pero estima la altura media a partir de puntos equidistantes.

```
función int_det(f:función; n:entero;
                a,b:real) devuelve real
variables suma,x:real; i:entero
principio
  suma:=0.0; delta:=(b-a)/n; x:=a+delta/2;
  para i:=1 hasta n hacer
    suma:=suma+f(x);
    x:=x+delta
  fpara;
  devuelve suma*delta
fin
```

4 Algoritmos numéricos: Integración probabilista

– En general, la versión determinista es más eficiente (menos iteraciones para obtener precisión similar).

– Pero, para todo algoritmo determinista de integración puede construirse una función que "lo vuelve loco"
(no así para la versión probabilista).

Por ejemplo, para $f(x) = \sin^2(100!\pi x)$ toda llamada a `int_det(f,n,0,1)` con `1`≤`n`≤`100` devuelve `0`, aunque el valor exacto es `0'5`.

– Otra ventaja: cálculo de integrales múltiples.

- Algoritmos deterministas: para mantener la precisión, el coste crece exponencialmente con la dimensión del espacio.
- En la práctica, se usan algoritmos probabilistas para dimensión 4 o mayor.
- Existen técnicas híbridas (parcialmente sistemáticas y parcialmente probabilistas): *integración cuasi-probabilista*.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Introducción

- Hay problemas para los que no se conocen soluciones deterministas ni probabilistas que den siempre una solución correcta
(ni siquiera una solución aproximada).

- Algoritmo de Monte Carlo:
  - A veces da una solución incorrecta.
  - Con una alta probabilidad encuentra una solución correcta **sea cual sea la entrada**.

    (NOTA: Esto es mejor que decir que el algoritmo funciona bien la mayoría de las veces).

4 Algoritmos de Monte Carlo: Introducción

- Sea p un número real tal que $0<p<1$. Un algoritmo de Monte Carlo es ***p*–correcto** si:

  Devuelve una solución correcta con probabilidad mayor o igual que p, cualesquiera que sean los datos de entrada.

  A veces, p dependerá del tamaño de la entrada, pero nunca de los datos de la entrada en sí.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

- Problema:
  - Dadas tres matrices $n \times n$, A, B y C, se trata de verificar si $C = AB$.
- Solución trivial:
  - Multiplicar A por B con:
    - El algoritmo directo: coste $\Theta(n^3)$.
    - El algoritmo de Strassen (*Divide y vencerás*, pág. 46): se puede llegar hasta $\Omega(n^{2,376})$.
- ¿Puede hacerse mejor?

4A Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

R. Freivalds: "Fast probabilistic algorithms", *Proceedings of the 8th Symposium on the Mathematical Foundations of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science, vol. 74, Springer-Verlag, 1979.

- Solución de Monte Carlo:

  Suponer que $D = AB - C$

  Sea i el índice de una fila no nula de D: $D_i \neq \vec{0}$.

  – Sea $S \subseteq \{1,\ldots,n\}$ cualquiera.

  – Sea $\Sigma_S(D) = \sum_{i \in S} D_i \qquad (\Sigma_\varnothing(D) = \vec{0})$

  – Sea $$S' = \begin{cases} S \cup \{i\}, & \text{si } i \notin S \\ S \setminus \{i\}, & \text{si } i \in S \end{cases}$$

  – Como D_i es no nulo, $\Sigma_S(D)$ y $\Sigma_{S'}(D)$ no pueden ser simultaneamente nulos.

  – Si S se elige al azar (lanzando una moneda para cada j), la pertenencia de i a S es tan probable como la no pertenencia, luego:

$$P\{\Sigma_S(D) \neq \vec{0}\} \geq \frac{1}{2}$$

4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

– Por otra parte, si $C = AB$, $\Sigma_S(D) = \vec{0}$ siempre.

– Idea para decidir si $C = AB$ o no:

Calcular $\Sigma_S(D)$ para un conjunto elegido al azar S y comparar el resultado con $\vec{0}$.

– ¿Cómo calcular $\Sigma_S(D)$ eficientemente?

Sea X el vector de n 0's y 1's tal que

$$X_j = \begin{cases} 1, & \text{si } j \in S \\ 0, & \text{si } j \notin S \end{cases}$$

Entonces:

$$\Sigma_S(D) = XD$$

Es decir, se trata de decidir si $XAB = XC$ o no para un vector binario X elegido al azar.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

– El coste del cálculo de $XAB = (XA)B$ y de XC es $\Theta(n^2)$.

– Algoritmo $^1/_2$–correcto para decidir si $AB = C$:

```
tipo matriz=vector[1..n,1..n]de real

función Freivalds(A,B,C:matriz)
        devuelve booleano
variables X:vector[1..n]de 0..1
          j:entero
principio
  para j:=1 hasta n hacer
    X[j]:=uniforme_entero(0,1)
  fpara;
  si (X*A)*B=X*C
    entonces devuelve verdad
    sino devuelve falso
  fsi
fin
```

4.4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

- ¿Es útil un algoritmo $^1/_2$–correcto para tomar una decisión?
- Es igual que decidir tirando una moneda al aire.

  ¡Y sin siquiera mirar los valores de las matrices!
- La clave:
  - Siempre que `Freivalds(A,B,C)` devuelve falso, podemos estar seguros de que $AB \neq C$.
  - Sólo cuando devuelve verdad, no sabemos la respuesta.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

- Idea: Repetir varias veces la prueba…

```
función repe_Freivalds(A,B,C:matriz;
                       k:entero)
        devuelve booleano
variables i:entero; distinto:booleano
principio
  distinto:=verdad; i:=1;
  mq i≤k and distinto hacer
    si freivalds(A,B,C)
      entonces i:=i+1
      sino distinto:=falso
    fsi
  fmq;
  devuelve distinto
fin
```

- Si devuelve falso, es seguro que $AB \neq C$.
- ¿Y si devuelve verdad?
  ¿ Cuál es la probabilidad de error?

4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

– Si $C = AB$, cada llamada a `Freivalds` devuelve necesariamente el valor verdad, por tanto `repe_Freivalds` devuelve siempre verdad.

  En este caso, la probabilidad de error es 0.

– Si $C \neq AB$, la probabilidad de que cada llamada devuelva (incorrectamente) el valor verdad es como mucho $1/2$.

  Como cada llamada a `Freivalds` es independiente, la probabilidad de que k llamadas sucesivas den todas una respuesta incorrecta es como mucho $1/2^k$.

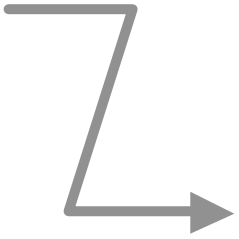
→ El algoritmo `repe_Freivalds` es $(1-2^{-k})$–correcto.

Por ejemplo, si $k = 10$, es mejor que 0'999–correcto; si $k = 20$, la probabilidad de error es menor que uno entre un millón.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

- Situación típica en algoritmos de Monte Carlo para problemas de decisión:

Si está garantizado que si se obtiene una de las dos respuestas (verdad o falso) el algoritmo es correcto



el decrecimiento de la probabilidad de error es espectacular repitiendo la prueba varias veces.

4.4 Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

- Alternativa: diseñar el algoritmo con una cota superior de la probabilidad de error como parámetro.

```
función epsilon_Freivalds(A,B,C:matriz;
                          epsilon:real))
        devuelve booleano
variable k:entero
principio
  k:=⌈log(1/epsilon)⌉;
  devuelve repe_Freivalds(A,B,C,k)
fin
```

  - Coste: $\Theta(n^2 \log 1/\text{epsilon})$.

4A Algoritmos de Monte Carlo: Verificación de un producto matricial

- Interés práctico:
  - Se necesitan $3n^2$ multiplicaciones escalares para calcular XAB y XC, frente a las n^3 necesarias para calcular AB.
    - Si exigimos epsilon=10^{-6}, y es cierto que $AB = C$, se requieren 20 ejecuciones de `Freivalds`, es decir, $60n^2$ multiplicaciones escalares, y eso sólo es mejor que n^3 si n>60.
  - Limitado a matrices de dimensión grande.

4 *Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad*

- Algoritmo de Monte Carlo más conocido: decidir si un número impar es primo o compuesto.
  - Ningún algoritmo determinista conocido puede responder en un tiempo "razonable" si el número tiene cientos de cifras.
  - La utilización de primos de cientos de cifras es fundamental en criptografía (ver *Divide y vencerás*, pág. 35 y siguientes).

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- La historia comienza en 1640 con Pierre de Fermat…

  - **Pequeño Teorema de Fermat.**
    Sea n primo. Entonces,

    $$a^{n-1} \bmod n = 1$$

    para todo entero a tal que $1 \leq a \leq n-1$.

  - Ejemplo: $n = 7$, $a = 5 \Rightarrow 5^6 \bmod 7 = 1$.
    En efecto, $5^6 = 15625 = 2232 \times 7 + 1$.

  - Enunciado **contrarrecíproco** del mismo teorema.
    Si a y n son enteros tales que $1 \leq a \leq n-1$, y si $a^{n-1} \bmod n \neq 1$, entonces n no es primo.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Una anécdota sobre Fermat y su teorema:
  - El mismo formuló la hipótesis:

    "$F_n = 2^{2^n} + 1$ es primo para todo n."

  - Lo comprobó para: F_0=3, F_1=5, F_2=17, F_3=257, F_4=65537.
  - Pero no pudo comprobar si F_5=4294967297 lo era.
  - Tampoco pudo darse cuenta de que:

    $3^{F_5-1} \mod F_5 = 3029026160 \neq 1 \Rightarrow F_5$ no es primo (por el contrarrecíproco de su propio teorema) .

  - Fue Euler, casi cien años después, quien factorizó ese número:

$$F_5 = 641 \times 6700417$$

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Utilización del pequeño teorema de Fermat para comprobar la primalidad:
  - En el caso de F_5, a Fermat le hubiera bastado con ver que

$$\exists a:\ 1 \le a \le F_5 - 1 \ \text{ t.q. } a^{F_5-1} \bmod F_5 \neq 1$$

$$(a = 3)$$

  - Esto nos da la siguiente idea:

```
función Fermat(n:entero) devuelve booleano
variable a:entero
principio
  a:=uniforme_entero(1,n-1);
  si a^(n-1) mod n=1
    entonces devuelve verdad
    sino devuelve falso
  fsi
fin
```

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

– El cálculo de $a^{n-1} \bmod n$ puede hacerse con el algoritmo de potenciación discreta que ya vimos (*Divide y vencerás*, pág. 33):

```
función potIter(a,n,z:entero) devuelve entero
{Devuelve a^n mod z.}
variable i,x,r:entero
principio
  i:=n; x:=a; r:=1;
  mq i>0 hacer
    si i es impar entonces r:=r*x mod z fsi;
    x:=x*x mod z;
    i:=i div 2
  fmq;
  devuelve r
fin
```

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Estudio del algoritmo basado en el pequeño teorema de Fermat:
  - Si devuelve el valor falso, es seguro que el número no es primo (por el teorema de Fermat).
  - Si devuelve el valor verdad:

    ¡No podemos concluir!
  - Necesitaríamos el recíproco del teorema de Fermat:

    "Si a y n son enteros tales que $1 \leq a \leq n-1$ y $a^{n-1} \bmod n = 1$, entonces n es primo."

    Pero este resultado es falso:
    - Casos triviales en que falla: $1^{n-1} \bmod n = 1$, para todo $n \geq 2$.
    - Más casos triviales en que falla: $(n-1)^{n-1} \bmod n = 1$, para todo impar $n \geq 3$.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

– Pero, ¿falla el recíproco del teorema de Fermat en casos no triviales ($a \neq 1$ y $a \neq n-1$)?

SI.

El ejemplo más pequeño:
$4^{14} \bmod 15 = 1$ y sin embargo 15 no es primo.

❖ Definición:
Falso testigo de primalidad.

Dado un entero n que no sea primo, un entero a tal que $2 \leq a \leq n-2$ se llama falso testigo de primalidad de n si $a^{n-1} \bmod n = 1$.

◆ Ejemplo: 4 es un falso test. de prim. para 15.

❖ Modificación del algoritmo “Fermat”:

– Elegir a entre 2 y n-2 (en lugar de entre 1 y n-1).

– El algoritmo falla para números no primos sólo cuando elige un falso testigo de primalidad.

4A Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

4.4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- La buena noticia:
  - Hay “pocos” testigos falsos de primalidad.

    Si bien sólo 5 de los 332 números impares no primos menores que 1000 carecen de falsos testigos de primalidad:

    - más de la mitad de ellos tienen sólo 2 falsos testigos de primalidad,
    - menos del 16% tienen más de 15,
    - en total, hay sólo 4490 falsos testigos de primalidad para todos los 332 números impares no primos menores que 1000

      (de un total de 172878 candidatos existentes)
    - puede verse que la **probabilidad media de error** del algoritmo sobre los **números** impares no primos **menores que 1000** es menor que **0’033** y es **todavía menor** para **números mayores que 1000**.

4.4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- La mala noticia:
  - Hay números no primos que admiten muchos falsos testigos de primalidad.

> Recordar la característica fundamental de un algoritmo de Monte Carlo:
>
> "Con una alta probabilidad encuentra una solución correcta **sea cual sea la entrada**."

Por ejemplo, 561 admite 318 falsos testigos.

Otro ejemplo peor:

Fermat(651693055693681) devuelve verdad con probabilidad mayor que 0'999965 y sin embargo ese número no es primo.

  - Puede demostrarse que el algoritmo de Fermat **no es *p*–correcto para ningún *p*>0**.
    - Por tanto la probabilidad de error no puede disminuirse mediante repeticiones independientes del algoritmo.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Una solución:

G.L. Miller: "Riemann's hipothesis and tests for primality", *Journal of Computer and System Sciences*, 13(3), pp. 300-317, 1976.

M.O. Rabin: "Probabilistic algorithms", *Algorithms and Complexity: Recent Results and New Directions*, J.F. Traub (ed.), Academic Press, 1976.

- Hay una **extensión del teorema de Fermat**:
  Sea n un entero impar mayor que 4 y primo.
  Entonces se verifica el predicado
  $B(n)=(a^t \bmod n=1) \vee$
  $\vee$ ($\exists i$ entero, $0 \le i < s$, t.q. $a^{2^i t} \bmod n = n-1$)
  para todo trío de enteros a, s y t tales que:
  $2 \le a \le n-2$ y $n-1=2^s t$, con t impar.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- De nuevo, necesitaríamos el recíproco de ese teorema…

  "Si n, s, t y a son enteros tales que $n>4$, $n-1=2^s t$, con n y t impares, $2\leq a\leq n-2$, y se verifica $B(n)$, entonces n es primo."

- Pero tampoco es cierto:

  Existen números n y a con $n>4$ e impar, $2\leq a\leq n-2$, para los que se verifica $B(n)$ para algunos valores de s y t verificando $n-1=2^s t$, con t impar, y ***n* no es primo**.

  Por ejemplo: $n=289$, $a=158$, $s=5$, $t=9$.

- Si n y a son excepciones del recíproco del teorema se dice que n es un **pseudoprimo en el sentido fuerte** para la base a y que a es un **falso testigo de primalidad para *n* en el sentido fuerte**.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Veamos primero como evaluar $B(n)$:

```
función B(a,n:entero) devuelve booleano
{Pre: n es impar y 2≤a≤n-2}
{Post: B(a,n)=verdad ⇔ a verifica B(n) para algún
 valor de s y t tales que n-1=2^s t con t impar}
variables s,t,x,i:entero; parar:booleano
principio
  s:=0; t:=n-1;
  repetir
    s:=s+1; t:=t div 2
  hastaQue t mod 2=1;
  x:=a^t mod n;  {se puede calcular con expdIter}
  si x=1 or x=n-1 entonces devuelve verdad
    sino
      i:=1; parar:=falso;
      mq i≤s-1 and not parar hacer
        x:=x*x mod n;
        si x=n-1
          entonces parar:=verdad
          sino i:=i+1
        fsi
      fmq;
      devuelve parar
  fsi
fin
```

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Podemos basar el algoritmo probabilista de comprobación de primalidad en la función *B*:

```
función Miller_Rabin(n:entero)
        devuelve booleano
{Pre: n>4 e impar}
variable a:entero
principio
  a:=uniforme_entero(2,n-2);
  devuelve B(a,n)
fin
```

  - Como con el algoritmo Fermat, **si la función devuelve falso, es seguro que el número no es primo** (por la extensión del teorema de Fermat).

  - ¿Y si devuelve verdad?

    El algoritmo puede fallar sólo para números pseudoprimos en el sentido fuerte (cuando elige como *a* un falso testigo de primalidad para *n* en el sentido fuerte).

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Por suerte (?), el número de falsos testigos de primalidad en el sentido fuerte es **mucho menor** que el de falsos testigos de primalidad.

  – Considerando los impares no primos menores que 1000, la probabilidad media de elegir un falso testigo (en el sº fuerte) es menor que 0'01.

  – Más del 72% de esos números no admiten ningún falso testigo (en el sº fuerte).

  – Todos los impares no primos entre 5 y 10^{13} fallan como pseudoprimos (en el sº fuerte) para al menos una de las bases 2, 3, 5, 7 ó 61.

  Es decir, para todo $n \leq 10^{13}$, n es primo si y sólo si $B(2,n) \wedge B(3,n) \wedge B(5,n) \wedge B(7,n) \wedge B(61,n)$ = verdad

  (éste es un algoritmo **determinista**, para $n \leq 10^{13}$).

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

- Y lo más importante:
  - La proporción de falsos testigos de primalidad (en el sº fuerte) es pequeña **para todo impar no primo**.

- **Teorema**.

  Sea n un entero impar mayor que 4.
  - Si n es primo, entonces $B(n)$=verdad para todo a tal que $2 \le a \le n-2$.
  - Si n es compuesto, entonces

$$\left| \{a \mid 2 \le a \le n-2 \wedge B(n) = \text{verdad para } a\} \right| \le (n-9)/4.$$

- **Corolario**.

  La función `Miller_Rabin` siempre devuelve el valor verdad cuando n es primo.

  Si n es un impar no primo, la función `Miller_Rabin` devuelve falso con una probabilidad mayor o igual que 3/4.

  Es decir, `Miller_Rabin` es un algoritmo 3/4–correcto para comprobar la primalidad.

4 Algoritmos de Monte Carlo: Comprobación de primalidad

– Como la respuesta “falso” siempre es correcta, para reducir la probabilidad de error se puede aplicar la misma técnica que para verificar el producto de matrices:

```
función repe_Miller_Rabin(n,k:entero)
        devuelve booleano
{Pre: n>4 e impar}
variables i:entero; distinto:booleano
principio
  distinto:=verdad; i:=1;
  mq i≤k and distinto hacer
    si Miller_Rabin(n)
      entonces i:=i+1
      sino distinto:=falso
    fsi
  fmq;
  devuelve distinto
fin
```

– Es un algoritmo de Monte Carlo $(1-4^{-k})$–correcto.

– Por ejemplo, si k=10 la probabilidad de error es menor que una millonésima.

– Coste con cota de probabilidad de error ε: $O(\log^3 n \log {}^1/_{\varepsilon})$.

(Es razonable para n$^{\underline{os}}$ de mil cifras con $\varepsilon<10^{-100}$.)

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

- Un algoritmo de Las Vegas **nunca** da una solución falsa.
  - Toma decisiones al azar para encontrar una solución antes que un algoritmo determinista.
  - Si no encuentra solución lo admite.
  - Hay dos tipos de algoritmos de Las Vegas, atendiendo a la posibilidad de no encontrar una solución:
    - *a*) Los que **siempre** encuentran una solución correcta, aunque las decisiones al azar no sean afortunadas y la eficiencia disminuya.
    - *b*) Los que **a veces**, debido a decisiones desafortunadas, no encuentran una solución.

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

- Tipo *a*: Algoritmos de *Sherwood*

  – Existe una solución determinista que es mucho más rápida en media que en el peor caso.

  Ejemplo: *quicksort*.

  Coste peor $\Omega(n^2)$ y coste promedio $O(n \log n)$.

  - Coste promedio: se calcula bajo la hipótesis de **equiprobabilidad** de la entrada.
  - En aplicaciones concretas, la equiprobabilidad es una falacia: entradas catastróficas pueden ser muy frecuentes.
  - Degradación del rendimiento en la práctica.

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

– Los algoritmos de Sherwood pueden reducir o eliminar la diferencia de eficiencia para distintos datos de entrada:

- Uniformización del tiempo de ejecución para todas las entradas de igual tamaño.
- En promedio (tomado sobre todos los ejemplares de igual tamaño) no se mejora el coste.
- Con alta probabilidad, ejemplares que eran muy costosos (con algoritmo determinista) ahora se resuelven mucho más rápido.
- Otros ejemplares para los que el algoritmo determinista era muy eficiente, se resuelven ahora con más coste.

Efecto *Robin Hood*:

"Robar" tiempo a los ejemplares "ricos" para dárselo a los "pobres".

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

- Tipo *b*: Algoritmos que, a veces, no dan respuesta.
  - Son aceptables si fallan con probabilidad baja.
  - Si fallan, se vuelven a ejecutar con la misma entrada.
  - Resuelven problemas para los que no se conocen algoritmos deterministas eficientes (ejemplo: la factorización de enteros grandes).
  - El tiempo de ejecución no está acotado pero sí es razonable con la probabilidad deseada para toda entrada.

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

– Consideraciones sobre el coste:

- Sea LV un algoritmo de Las Vegas que puede fallar y sea $p(x)$ la probabilidad de éxito si la entrada es x.

```
algoritmo LV(ent x:tpx; sal s:tpsolución;
             sal éxito:booleano)
{éxito devuelve verdad si LV encuentra la solución
 y en ese caso s devuelve la solución encontrada}
```

- Se exige que $p(x)>0$ para todo x.

- Es mejor aún si $\exists\ \delta>0$: $p(x)\geq\delta$ para todo x

  (así, la probabilidad de éxito no tiende a 0 con el tamaño de la entrada).

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

```
función repe_LV(x:tpx) devuelve tpsolución
variables s:tpsolución; éxito:booleano
principio
  repetir
    LV(x,s,éxito)
  hastaQue éxito;
  devuelve s
fin
```

- El número de ejecuciones del bucle es $1 / p(x)$.

- Sea $v(x)$ el tiempo esperado de ejecución de `LV` si `éxito=verdad` y $f(x)$ el tiempo esperado si `éxito=falso`.

- Entonces el tiempo esperado $t(x)$ de `repe_LV` es:

$$t(x) = p(x)v(x) + \big(1 - p(x)\big)\big(f(x) + t(x)\big)$$

$$\Rightarrow \quad t(x) = v(x) + \frac{1 - p(x)}{p(x)} f(x)$$

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

$$t(x) = v(x) + \frac{1 - p(x)}{p(x)} f(x)$$

Notar que una disminución de $v(x)$ y $f(x)$ suele ser a costa de disminuir $p(x)$.

ß

Hay que optimizar esta función.

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

– Ejemplo sencillo: El problema de las 8 reinas en el tablero de ajedrez.

- Algoritmo determinista (*Búsqueda con retroceso*, pág. 16 y siguientes):

  Nº de nodos visitados: 114
  (de los 2057 nodos del árbol)

- Algoritmo de Las Vegas voraz: colocar cada reina aleatoriamente en uno de los escaques posibles de la siguiente fila.

  El algoritmo puede terminar con éxito o fracaso (cuando no hay forma de colocar la siguiente reina).

  Nº de nodos visitados si hay éxito: v=9

  Nº esperado de nodos visitados si hay fracaso: f=6´971

  Probabilidad de éxito: p=0'1293

  (más de 1 vez de cada 8)

  Nº esperado de nodos visitados repitiendo hasta obtener un éxito: $t=v+f(1-p)/p$= 55'93.

¡Menos de la mitad!

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

– Puede hacerse mejor combinando ambos:

- Poner las primeras reinas al azar y dejarlas fijas y con el resto usar el algoritmo de búsqueda con retroceso.

Cuantas más reinas pongamos al azar:

→ Menos tiempo se precisa para encontrar una solución o para fallar.

→ Mayor es la probabilidad de fallo.

nº al azar	*p*	*v*	*f*	*t*
0	1,0000	114,00	–	114,00
1	1,0000	39,63	–	39,63
2	0,8750	22,53	39,67	28,20
3	0,4931	13,48	15,10	29,01
4	0,2618	10,31	8,79	35,10
5	0,1624	9,33	7,29	46,92
6	0,1357	9,05	6,98	53,50
7	0,1293	9,00	6,97	55,93
8	0,1293	9,00	6,97	55,93

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

Mejor solución a mano: 3 reinas al azar (¡probadlo!)

nº al azar	*p*	*v*	*f*	*t*	REAL
0	1,0000	114,00	–	114,00	0,45 ms
1	1,0000	39,63	–	39,63	
2	0,8750	22,53	39,67	28,20	0,14 ms
3	0,4931	13,48	15,10	29,01	0,21 ms
4	0,2618	10,31	8,79	35,10	
5	0,1624	9,33	7,29	46,92	
6	0,1357	9,05	6,98	53,50	
7	0,1293	9,00	6,97	55,93	
8	0,1293	9,00	6,97	55,93	1 ms

Datos reales medidos en un computador:

¡Discrepancias!

En el caso "nº al azar = 8", el 71% del tiempo se gasta en **generar números pseudo-aleatorios**.

El valor óptimo es colocar 2 reinas al azar.

4 Algoritmos de Las Vegas: Introducción

– Para dimensiones mayores a 8:

Para 39 reinas en un tablero de dimensión 39.

Algoritmo determinista:

11402835415 nodos

41 horas en un computador

Algoritmo Las Vegas, con 29 reinas al azar:

p=0,21

$v \approx f \approx 100$ nodos

$\Rightarrow t \approx 500$ nodos (20×10^6 veces mejor)

8,5 milisegundos

Algoritmo L.V. puro (39 reinas al azar):

p=0,0074

150 milisegundos (10^6 veces mejor)

4 Algoritmos de Las Vegas: Ordenación probabilista

- Ejemplo de algoritmo de Las Vegas "de tipo *a*" (algoritmo de Sherwood).
  - Recordar el método de ordenación de Hoare (*Divide y vencerás*, pág. 14)):

```
algoritmo ordRápida(e/s T:vect[1..n]de dato;
                    ent i,d:1..n)
{Ordenación de las componentes i..d de T.}
variable p:dato; m:1..n
principio
  si d-i es pequeño
    entonces ordInserción(T,i,d)
    sino
      p:=T[i];  {p se llama 'pivote'}
      divide(T,i,d,p,m);
      {i≤k<m⇒T[k]≤T[m]=p ∧ m<k≤d⇒T[k]>T[m]}
      ordRápida(T,i,m-1);
      ordRápida(T,m+1,d)
  fsi
fin
```

  - Coste promedio: $O(n \log n)$
  - Coste peor: $\Omega(n^2)$

4 Algoritmos de Las Vegas: Ordenación probabilista

```
algoritmo divide(e/s T:vect[1..n]de dato;
                 ent i,d:1..n; ent p:dato;
                 sal m:1..n)
{Permuta los elementos i..d de T de forma que:
   i≤m≤d,
   ∀k t.q. i≤k<m: T[k]≤p,
   T[m]=p,
   ∀k t.q. m<k≤d: T[k]>p}
variables k:1..n
principio
  k:=i; m:=d+1;
  repetir k:=k+1 hasta que (T[k]>p)or(k≥d);
  repetir m:=m-1 hasta que (T[m]≤p);
  mq k<m hace
    intercambiar(T[k],T[m]);
    repetir k:=k+1 hasta que T[k]>p;
    repetir m:=m-1 hasta que T[m]≤p
  fmq;
  intercambiar(T[i],T[m])
fin
```

4 Algoritmos de Las Vegas: Ordenación probabilista

- Un ejemplo del caso peor:

  Si todos los elementos son iguales, el algoritmo anterior no se percata.

- Mejora evidente:

```
algoritmo ordRápida(e/s T:vect[1..n]de dato;
                    ent i,d:1..n)
{Ordenación de las componentes i..d de T.}
variable m:1..n
principio
  si d-i es pequeño
    entonces ordInserción(T,i,d)
    sino
      p:=T[i];  {pivote}
      divideBis(T,i,d,p,m,r);
       {m+1≤k≤r-1⇒T[k]=p ∧ i≤k≤m⇒T[k]<p ∧
            ∧ m≤k≤d⇒T[k]>p}
      ordRápida(T,i,m);
      ordRápida(T,r,d)
  fsi
fin
```

4 Algoritmos de Las Vegas: Ordenación probabilista

– Versión probabilista:

En lugar de elegir el pivote `p` como el primer elemento del vector, lo ideal sería elegir la mediana, pero esto sería muy costoso, luego elegimos el pivote al azar en el intervalo `i..d`.

```
algoritmo ordRápidaLV(e/s T:vect[1..n]de dato;
                      ent i,d:1..n)
{Ordenación de las componentes i..d de T.}
variable m:1..n
principio
  si d-i es pequeño
    entonces ordInserción(T,i,d)
    sino
      p:=T[uniforme_entero(i,d)];  {pivote}
      divideBis(T,i,d,p,m,r);
       {m+1≤k≤r-1⇒T[k]=p ∧ i≤k≤m⇒T[k]<p ∧
          ∧ m≤k≤d⇒T[k]>p}
      ordRápidaLV(T,i,m);
      ordRápidaLV(T,r,d)
  fsi
fin
```

– Tiempo **esperado** en el peor caso: $O(n \log n)$

4 Algoritmos de Las Vegas: Factorización de enteros

- Ejemplo de algoritmo de Las Vegas "de tipo *b*".
- Problema: descomponer un número en sus factores primos.

- Problema más sencillo: **partición**

  – Dado un entero $n>1$, encontrar un divisor no trivial de n, suponiendo que n no es primo.

- Factorización =

  = test de primalidad + partición

  – Para factorizar n, hemos terminado si n es primo, si no, encontramos un divisor m de n y recursivamente factorizamos m y n/m.

4 Algoritmos de Las Vegas: Factorización de enteros

- Solución ingenua para el problema de la partición:

```
función partición(n:entero) devuelve entero
variables m:entero; éxito:booleano
principio
  m:=2; éxito:=falso;
  mq m ≤ ⌊sqrt(n)⌋ and not éxito hacer
    si m divide a n
      entonces éxito:=verdad
      sino m:=m+1
    fsi
  fmq;
  si éxito
    entonces devuelve m
    sino devuelve n
  fsi
fin
```

  - Coste en el peor caso: $\Omega\left(\sqrt{n}\right)$

4 Algoritmos de Las Vegas: Factorización de enteros

- El coste de la solución ingenua es demasiado alto:
  - Partir un número "duro" de unas 40 cifras:

    Si cada ejecución del bucle tarda 1 nanosegundo, el algoritmo puede tardar **miles de años**.

    Número "duro" significa que es el producto de dos primos de tamaño parecido.

  - Partir un número *n* de 100 cifras:

$$\sqrt{n} \approx 7 \times 10^{49}$$

    (Nota: 10^{30} picosegundos es el doble de la edad estimada del Universo.)

4 Algoritmos de Las Vegas: Factorización de enteros

- Recordar el sistema RSA de criptografía
  - En 1994 se factorizó un número duro de 129 cifras tras 8 meses de trabajo de más de 600 computadores de todo el mundo.

    Se utilizó un algoritmo de Las Vegas.
  - Existen varios algoritmos de Las Vegas para factorizar números grandes (véase [BB96]).
    - Están basado en resultados avanzados de teoría de números.
    - Siguen teniendo costes altísimos

      (factorizar un número de 100 cifras precisa del orden de 2×10^{15} operaciones).