# 4 Programación dinámica

# 4 Programación dinámica: Introducción

- Recordemos el problema de la mochila:
  - Se tienen $n$ objetos fraccionables y una mochila.
  - El objeto $i$ tiene peso $p_i$ y una fracción $x_i$ ($0 \le x_i \le 1$) del objeto $i$ produce un beneficio $b_i x_i$.
  - El objetivo es llenar la mochila, de capacidad $C$, de manera que se maximice el beneficio.

$$\text{maximizar} \quad \sum_{1 \le i \le n} b_i x_i$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{1 \le i \le n} p_i x_i \le C$$

$$\text{con} \quad 0 \le x_i \le 1,\ b_i > 0,\ p_i > 0,\ 1 \le i \le n$$

- Una variante: la "mochila 0-1"
  - $x_i$ sólo toma valores 0 ó 1, indicando que el objeto se deja fuera o se mete en la mochila.
  - Los pesos, $p_i$, y la capacidad son números naturales.
    Los beneficios, $b_i$, son reales no negativos.

# 4 Programación dinámica: Introducción

- Ejemplo:

  $n$=3 $C$=15

  $(b_1,b_2,b_3)$=(38,40,24)

  $(p_1,p_2,p_3)$=(9,6,5)

- Recordar la estrategia voraz:
  - Tomar siempre el objeto que proporcione mayor beneficio por unidad de peso.
  - Se obtiene la solución:

    $(x_1,x_2,x_3)$=(0,1,1), con beneficio 64
  - Sin embargo, la solución óptima es:

    $(x_1,x_2,x_3)$=(1,1,0), con beneficio 78

- Por tanto, la estrategia voraz no calcula la solución óptima del problema de la mochila 0-1.

# 4 Programación dinámica: Introducción

R. Bellman: *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.

- Técnica de programación dinámica
  - Se emplea típicamente para resolver problemas de optimización.
  - Permite resolver problemas mediante una secuencia de decisiones.

    → Como el esquema voraz

  - A diferencia del esquema voraz, se producen varias secuencias de decisiones y sólamente al final se sabe cuál es la mejor de ellas.

  - Está basada en el **principio de optimalidad de Bellman**:

    > "Cualquier subsecuencia de decisiones de una secuencia óptima de decisiones que resuelve un problema también debe ser óptima respecto al subproblema que resuelve."

# 4 Programación dinámica: Introducción

- Supongamos que un problema se resuelve tras tomar un secuencia $d_1, d_2, \ldots, d_n$ de decisiones.

- Si hay $d$ opciones posibles para cada una de las decisiones, una técnica de fuerza bruta exploraría un total de $d^n$ secuencias posibles de decisiones (explosión combinatoria).

- La técnica de programación dinámica evita explorar todas las secuencias posibles por medio de la resolución de subproblemas de tamaño creciente y almacenamiento en una tabla de las soluciones óptimas de esos subproblemas para facilitar la solución de los problemas más grandes.

# 4 Programación dinámica: Introducción

- Más formalmente:
  - Sea $E_0$ el estado inicial del problema.
  - Sea $D_1 = \{v_{11}, \ldots, v_{1n_1}\}$ el conjunto de valores de decisión posibles para la decisión $d_1$.
  - Sea $E_{1i}$ el estado del problema tras la elección del valor $v_{1i}$, $1 \le i \le n_1$.
  - Sea $S_{1i}$ una secuencia óptima de decisiones respecto al estado $E_{1i}$.

    - Principio de optimalidad de Bellman:

      Una secuencia óptima de decisiones respecto a $E_0$ es la mejor de las secuencias de decisión $\{v_{1i}, S_{1i}\}$, $1 \le i \le n_1$.

      El mismo razonamiento puede aplicarse a cualquier subsecuencia de decisiones $d_k, \ldots, d_l$, $1 \le k \le l \le n$, partiendo como estado inicial de $E_{k-1}$.

      Una solución dinámica para este problema, simbolizado como $(k,l)$, debe expresarse en términos de los valores de decisión existentes para la decisión $d_k$ y el subproblema $(k+1,l)$, resultante de aplicar cada valor de decisión.

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

- Sea *mochila*($k$,$l$,$P$) el problema:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i=k}^{l} b_i x_i$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{i=k}^{l} p_i x_i \leq P$$

$$\text{con} \quad x_i \in \{0,1\}, \quad k \leq i \leq l$$

  - El problema de la mochila 0-1 es *mochila*(1,$n$,$C$).

- Principio de optimalidad:

  Sea $y_1,\ldots,y_n$ una secuencia óptima de valores 0-1 para $x_1,\ldots,x_n$.

  - Si $y_1$=0, entonces $y_2,\ldots,y_n$ forman una secuencia óptima para el problema *mochila*(2,$n$,$C$).
  - Si $y_1$=1, entonces $y_2,\ldots,y_n$ forman una secuencia óptima para el problema *mochila*(2,$n$,$C$-$p_1$).

  Demostración: Si existe una solución mejor $\tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_n$ para el problema correspondiente, entonces $y_1,\tilde{y}_2,\ldots,\tilde{y}_n$ es mejor que $y_1,y_2,\ldots,y_n$ para el problema *mochila*(1,$n$,$C$), en contra de la hipótesis.

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

- Lo mismo se cumple en cualquier etapa de decisión:
  - Si $y_1,\ldots,y_n$ es una solución óptima del problema *mochila*(1,*n*,*C*), entonces para todo *j*, $1 \le j \le n$:
    - $y_1,\ldots,y_j$ es solución óptima de

$$mochila\left(1, j, \sum_{i=1}^{j} p_i x_i\right)$$

    - $y_{j+1},\ldots,y_n$ es solución óptima de

$$mochila\left(j+1, n, C - \sum_{i=1}^{j} p_i x_i\right)$$

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

- Ecuación de recurrencia hacia adelante:

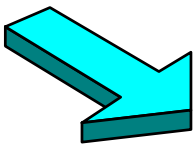
  - Si $\vec{g}_j(c)$ es el beneficio (o ganancia total) de una solución óptima de *mochila*($j$,$n$,$c$), entonces

    $$\vec{g}_j(c) = \max\{\vec{g}_{j+1}(c),\ \vec{g}_{j+1}(c - p_j) + b_j\}$$

    dependiendo de que el objeto $j$-ésimo entre o no en la solución (nótese que sólo puede entrar si $c$-$p_j \geq 0$).

  - Además,

    $$\vec{g}_{n+1}(c) = 0, \text{ para cualquier capacidad } c$$



Ambas ecuaciones permiten calcular $\vec{g}_1(C)$, que es el valor de una solución óptima de *mochila*(1,$n$,$C$).

(Nótese que la ecuación de recurrencia es hacia adelante pero el cálculo se realiza hacia atrás.)

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

- Ecuación de recurrencia hacia atrás:

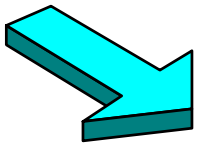
  - Si $\bar{g}_j(c)$ es el beneficio (o ganancia total) de una solución óptima de *mochila*(1,*j*,*c*), entonces

    $$\bar{g}_j(c) = \max\left\{\bar{g}_{j-1}(c),\ \bar{g}_{j-1}(c-p_j)+b_j\right\}$$

    dependiendo de que el objeto *j*-ésimo entre o no en la solución (nótese que sólo puede entrar si $c\text{-}p_j \geq 0$).

  - Además,

    $$\bar{g}_0(c) = 0, \text{ para cualquier capacidad } c$$



Ambas ecuaciones permiten calcular $\bar{g}_n(C)$, que es el valor de una solución óptima de *mochila*(1,*n*,*C*).

(Ahora la recurrencia es hacia atrás pero el cálculo se realiza hacia adelante.)

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

- Tanto la recurrencia hacia adelante como hacia atrás permiten escribir un algoritmo recursivo de forma inmediata.

```
función mochila1(p,b:vector[1..n] de nat;
                 C:nat) devuelve nat
principio
  devuelve g(n,C)
fin
```

```
función g(j,c:nat) devuelve nat
principio
  si j=0 entonces devuelve 0
    sino
      si c<p[j]
        entonces devuelve g(j-1,c)
        sino
          si g(j-1,c)≥g(j-1,c-p[j])+b[j]
            entonces
              devuelve g(j-1,c)
            sino
              devuelve g(j-1,c-p[j])+b[j]
          fsi
      fsi
  fsi
fin
```

# 4.4 El problema de la mochila 0-1

- Problema: ineficiencia
  - Un problema de tamaño $n$ se reduce a dos subproblemas de tamaño ($n$-1).
  - Cada uno de los dos subproblemas se reduce a otros dos…

  Por tanto, se obtiene un algoritmo exponencial.

- Sin embargo, el número total de subproblemas a resolver no es tan grande:

  La función $\tilde{g}_j(c)$ tiene dos parámetros:
  - el primero puede tomar $n$ valores distintos y
  - el segundo, $C$ valores.

  ¡Luego sólo hay $nC$ problemas diferentes!

- Por tanto, la solución recursiva está generando y resolviendo el mismo problema muchas veces.

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

- Para evitar la repetición de cálculos, las soluciones de los subproblemas se deben almacenan en una tabla.
  - Matriz $n \times C$ cuyo elemento $(j,c)$ almacena $\tilde{g}_j(c)$
  - Para el ejemplo anterior:

    $n$=3 $C$=15

    $(b_1,b_2,b_3)$=(38,40,24)

    $(p_1,p_2,p_3)$=(9,6,5)

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $p_1 = 9$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 38 | 38 | 38 | 38 | 38 | 38 | 38 |
| $p_2 = 6$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 | 78 |
| $p_3 = 5$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 24 | 40 | 40 | 40 | 40 | 40 | 64 | 64 | 64 | 64 | 78 |

$$\tilde{g}_j(c) = \max\left\{\tilde{g}_{j-1}(c),\ \tilde{g}_{j-1}(c - p_j) + b_j\right\}$$

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

```
algoritmo mochila(ent p,b:vect[1..n]de nat;
                  ent Cap:nat;
              sal g:vect[0..n,0..Cap]de nat)
variables c,j:nat
principio
  para c:=0 hasta Cap hacer g[0,c]:=0 fpara;
  para j:=1 hasta n hacer g[j,0]:=0 fpara;
  para j:=1 hasta n hacer
    para c:=1 hasta Cap hacer
      si c<p[j]
        entonces
          g[j,c]:=g[j-1,c]
        sino
          si g[j-1,c]≥g[j-1,c-p[j]]+b[j]
            entonces
              g[j,c]:=g[j-1,c]
            sino
              g[j,c]:=g[j-1,c-p[j]]+b[j]
          fsi
      fsi
    fpara
  fpara
fin
```

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

- Cálculos posibles a partir de la tabla `g`:
  - beneficio total: `g[n,Cap]`
  - los objetos metidos en la mochila:

```
algoritmo objetos(ent p,b:vect[1..n]de nat;
                  ent Cap:nat;
                ent g:vect[0..n,0..Cap]de nat)
principio
  test(n,Cap)
fin
```

```
algoritmo test(ent j,c:nat)
principio
  si j>0 entonces
    si c<p[j] entonces test(j-1,c)
      sino
        si g[j-1,c-p[j]]+b[j]>g[j-1,c]
          entonces
            test(j-1,c-p[j]);
            escribir('meter ',j)
          sino test(j-1,c)
        fsi
    fsi
  fsi
fin
```

# 4.1 El problema de la mochila 0-1

## ❖ Consideraciones finales

- Cada componente de la tabla `g` se calcula en tiempo constante, luego el coste de construcción de la tabla es $O(nC)$.

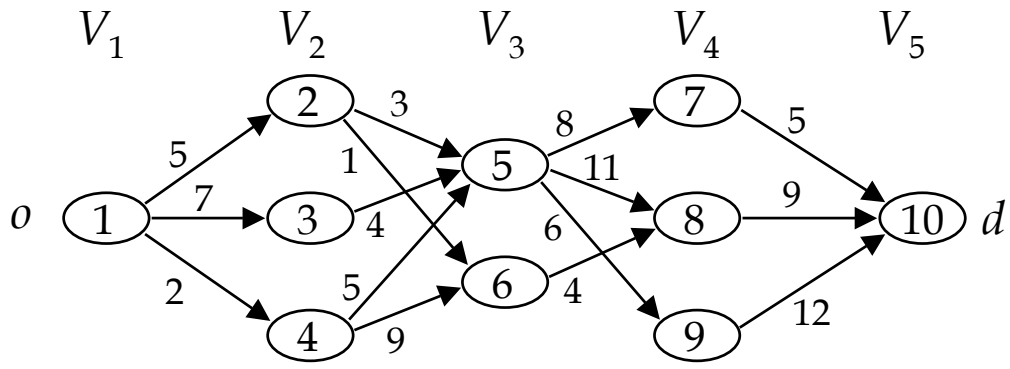
- El algoritmo `test` se ejecuta una vez por cada valor de `j`, desde `n` descendiendo hasta `0`, luego su coste es $O(n)$.

- Si $C$ es muy grande, entonces esta solución no es buena.

- Si los pesos $p_i$ o la capacidad $C$ son reales, esta solución no sirve.

# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Grafo multietapa:
  - Un grafo multietapa $G=(V,A)$ es un grafo dirigido en el que se puede hacer una partición del conjunto $V$ de vértices en $k$ ($k \geq 2$) conjuntos distintos $V_i$, $1 \leq i \leq k$, tal que todo arco del grafo $(u,v)$ es tal que $u \in V_i$ y $v \in V_{i+1}$ para algún $i$, $1 \leq i < k$.
  - Los conjuntos $V_1$ y $V_k$ tienen un solo vértice que se llama vértice origen, $o$, y vértice destino, $d$, respectivamente.

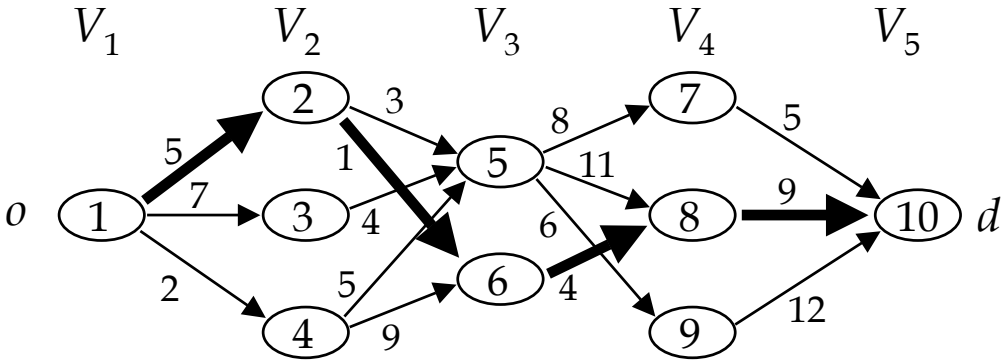



  - Consideraremos grafos etiquetados. Denotamos por $c(u,v)$ el coste del arco $(u,v)$.

# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

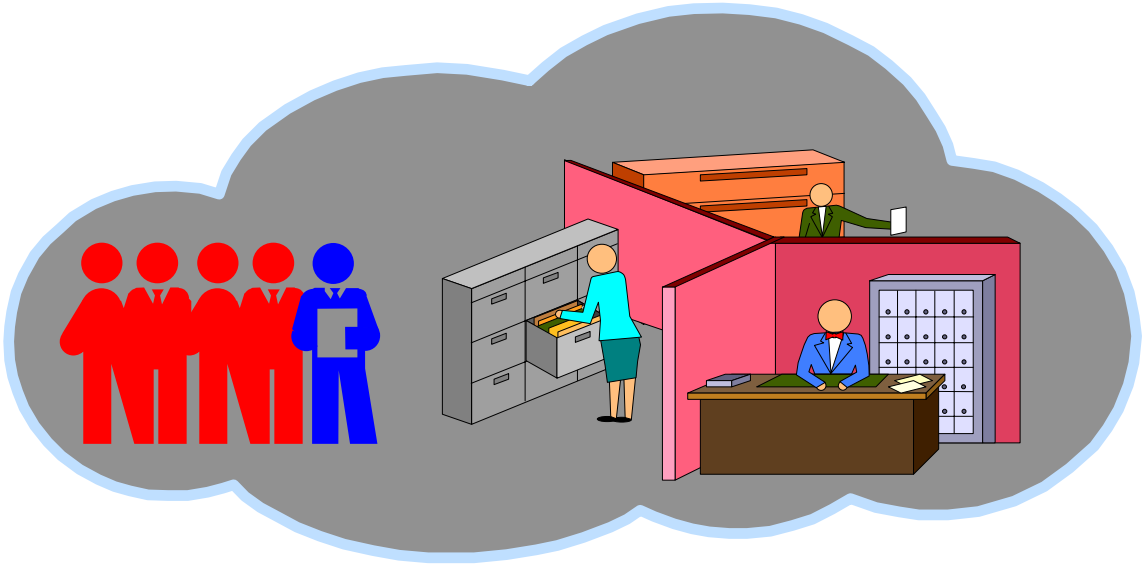
- El problema: Encontrar un camino de coste mínimo que vaya de *o* a *d*.

  - Todo camino de *o* a *d* tiene exactamente un vértice en cada $V_i$, por eso se dice que cada $V_i$ define una etapa del grafo.



# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Ejemplo de aplicación:
  - Se tienen $n$ unidades de un recurso que deben asignarse a $r$ proyectos.
  - Si se asignan $j$, $0 \leq j \leq n$, unidades al proyecto $i$ se obtiene un beneficio $N_{i,j}$.
  - El problema es asignar el recurso a los $r$ proyectos maximizando el beneficio total.

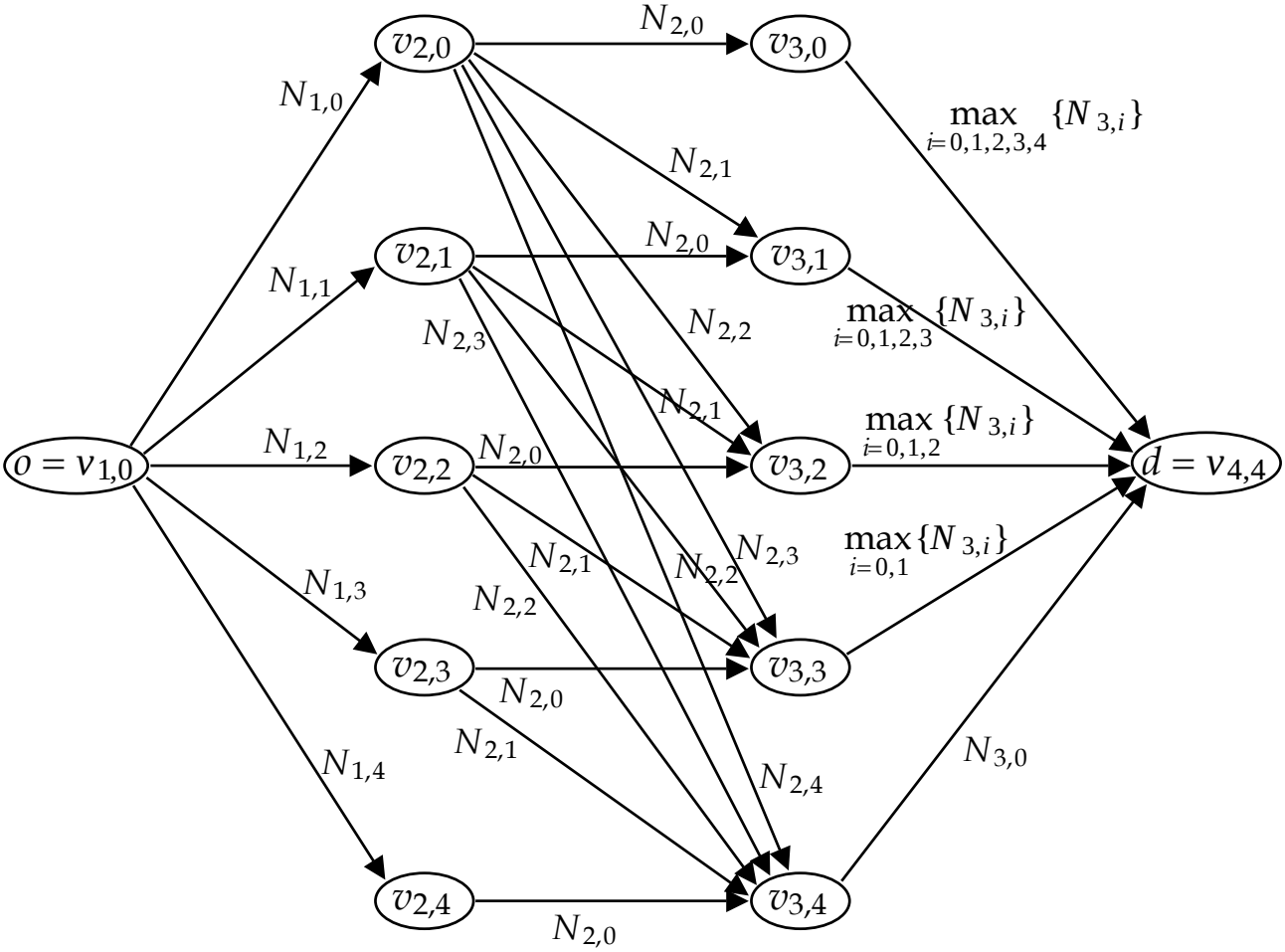


# 4.1 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Formulación como grafo multietapa:
  - Número de etapas: $r$+1
  - La etapa $i$, $1 \le i \le r$, representa el proyecto $i$.
  - Hay $n$+1 vértices $v_{i,j}$, $0 \le j \le n$, en cada etapa $i$, $2 \le i \le r$.
  - Las etapas 1 y $r$+1 tienen un vértice, $o=v_{1,0}$ y $d=v_{r+1,n}$, respectivamente.
  - El vértice $v_{i,j}$, $2 \le i \le r$, representa el estado en el que se asignan un total de $j$ unidades del recurso a los proyectos 1, 2, …, $i$-1.
  - Los arcos son de la forma $(v_{i,j},v_{i+1,l})$ para todo $j \le l$ y $1 \le i < r$.
  - El arco $(v_{i,j},v_{i+1,l})$, $j \le l$, tiene asignado un coste $N_{i,l-j}$ que corresponde a asignar $l$-$j$ unidades del recurso al proyecto $i$, $1 \le i < r$.
  - Además hay arcos de la forma $(v_{r,j},v_{r+1,n})$, que tienen asignado un coste $\max_{0 \le p \le n-j} \{N_{r,p}\}$.

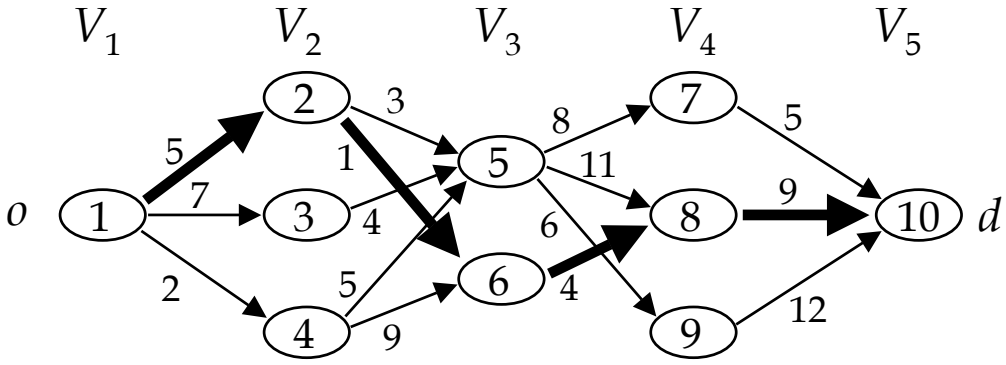
# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Grafo resultante para $r$=3 y $n$=4.
  - La asignación óptima está definida por un camino de coste máximo de $o$ a $d$.
  - Para convertirlo en un problema de camino de coste mínimo basta cambiar los signos de las etiquetas.



# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Solución de programación dinámica:




  - Cada camino de $o$ a $d$ es el resultado de una secuencia de $k$-2 decisiones.
  - Decisión $i$-ésima: determinar, a partir de un vértice $v_i$ de $V_i$, un arco que tenga a $v_i$ como origen y algún nodo de $V_{i+1}$ como destino.

  - Principio de optimalidad:

    El camino de coste mínimo debe contener subcaminos de coste mínimo entre otros nodos.

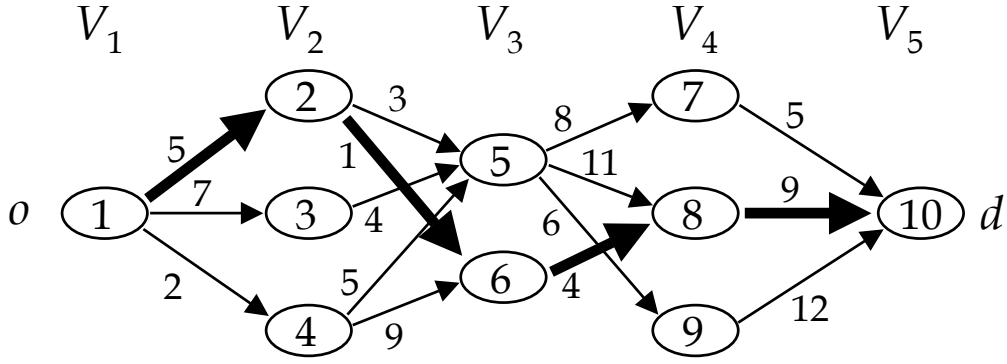
    Dem.: En otro caso, podrían sustituirse dichos subcaminos por otros mejores, resultando un camino total de coste menor.

# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Ecuación de recurrencia hacia adelante:
  - Sea $s(i,j)$ un camino de coste mínimo $C^*(i,j)$ desde el vértice $j$ del conjunto $V_i$ hasta el vértice destino $d$.
  - Entonces:

$$C^*(k-1,j) = \begin{cases} c(j,d), & \text{si } (j,d) \in A \\ \infty, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

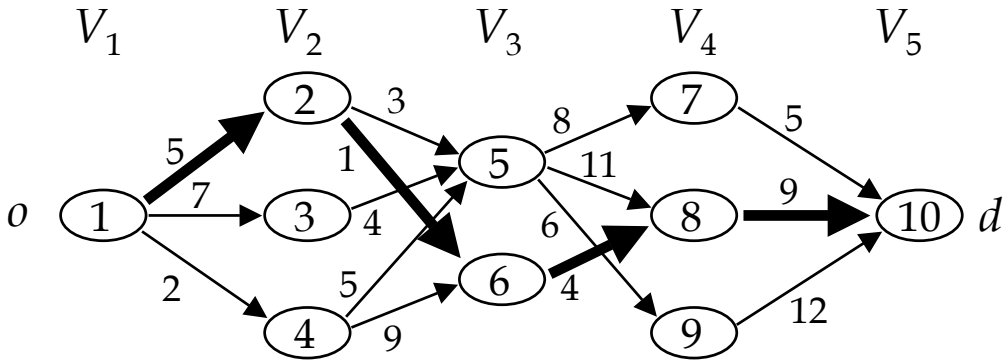
$$C^*(i,j) = \min_{\substack{l \in V_{i+1} \\ (j,l) \in A}} \left\{ c(j,l) + C^*(i+1,l) \right\}, \text{ para } 1 \le i \le k-2$$



# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

$$C^*(k-1,j)=\begin{cases} c(j,d), & \text{si } (j,d)\in A \\ \infty, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$C^*(i,j)=\min_{\substack{l\in V_{i+1}\\(j,l)\in A}}\left\{c(j,l)+C^*(i+1,l)\right\},\ \text{para } 1\le i\le k-2$$




$$C^*(3,5)=\min\{8+C^*(4,7),11+C^*(4,8),6+C^*(4,9)\}=13$$

$$C^*(3,6)=4+C^*(4,8)=13$$

$$C^*(2,2)=\min\{3+C^*(3,5),1+C^*(3,6)\}=14$$

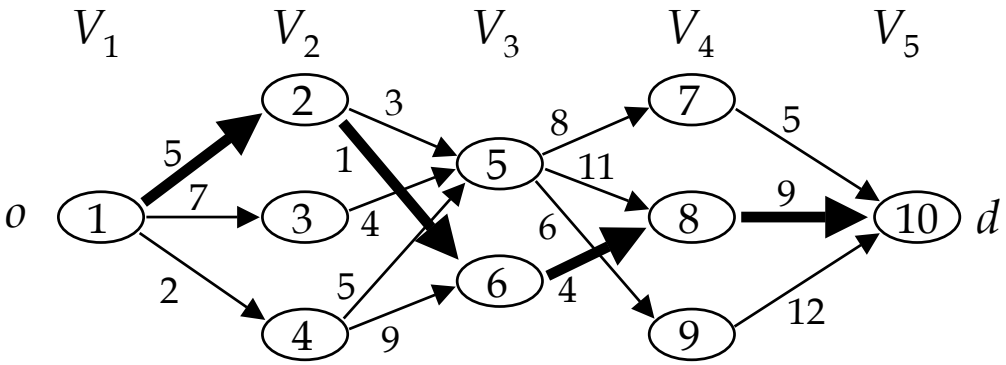
$$C^*(2,3)=4+C^*(3,5)=17$$

$$C^*(2,4)=\min\{5+C^*(3,5),9+C^*(3,6)\}=18$$

$$\boxed{C^*(1,1)=\min\{5+C^*(2,2),7+C^*(2,3),2+C^*(2,4)\}=19}$$

# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Falta almacenar las decisiones hechas en cada etapa que minimizan el coste:
  - Sea $D(i,j)$ el valor de $l$ que minimiza $c(j,l)+C^*(i+1,l)$.
  - Entonces el camino de coste mínimo es: $v_1$=1; $v_2$=$D$(1,1); $v_3$=$D$(2,$D$(1,1)); etc.




$$D(3,5)=7;\quad D(3,6)=8$$
$$D(2,2)=6;\quad D(2,3)=5;\quad D(2,4)=5$$
$$D(1,1)=2$$

$$v_1=1$$
$$v_2=D(1,1)=2$$
$$v_3=D(2,D(1,1))=6$$
$$v_4=D(3,D(2,D(1,1)))=8$$

# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

```
algoritmo multietapa(ent G=(V,A,c):grafo;
                     ent k,n:nat;
                     sal P:vect[1..k]de 1..n)
{Los vértices están numerados de forma que los
 índices de los vértices de una etapa son mayores
 que los índices de los de la etapa anterior.
 El primer índice de C* y D, que sólo identificaba
 la etapa, se ha suprimido.}
variables C:vect[1..n]de real;
          D:vect[1..n]de 1..n;
          j,r:1..n
principio
  C[n]:=0.0;  {Cálculo de C* y D}
  para j:=n-1 descendiendo hasta 1 hacer
    r:=vértice t.q. (j,r)∈A ∧
                    c(j,r)+C[r] es mínimo;
    C[j]:=c(j,r)+C[r];
    D[j]:=r
  fpara;
  P[1]:=1; P[k]:=n; {Construcción del camino}
  para j:=2 hasta k-1 hacer
    P[j]:=D[P[j-1]]
  fpara
fin
```

# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Coste del algoritmo:
  - Si $G$ está representado mediante listas de adyacencia, entonces el cálculo de $r$ en el interior del primer bucle lleva un tiempo proporcional al grado del vértice $j$.
  - Por tanto, si $a$ es el número de arcos del grafo, el coste total del algoritmo es $\Theta(n+a)$.

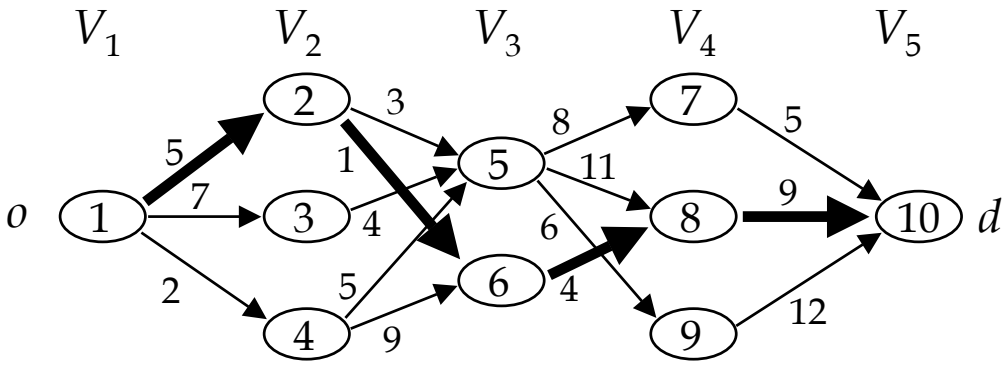
    (El segundo bucle lleva un tiempo $\Theta(k)$.)

# 4 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

- Análogamente, se desarrolla la recurrencia hacia atrás.
  - Ecuación de recurrencia hacia atrás:
    - Sea $s(i,j)$ un camino de coste mínimo $C^*(i,j)$ desde el vértice origen $o$ hasta el vértice $j$ del conjunto $V_i$.
    - Entonces:

$$C^*(2,j) = \begin{cases} c(o,j), & \text{si } (o,j) \in A \\ \infty, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$C^*(i,j) = \min_{\substack{l \in V_{i-1} \\ (l,j) \in A}} \{c(l,j) + C^*(i-1,l)\}, \text{ para } 3 \le i \le k$$



# 4.1 Camino de coste mínimo en un grafo multietapa

```
algoritmo multietapaB(ent G=(V,A,c):grafo;
                      ent k,n:nat;
                      sal P:vect[1..k]de 1..n)
{Los vértices están numerados de forma que los
 índices de los vértices de una etapa son mayores
 que los índices de los de la etapa anterior.
 El primer índice de C* y D, que sólo identificaba
 la etapa, se ha suprimido.}
variables C:vect[1..n]de real;
          D:vect[1..n]de 1..n;
          j,r:1..n
principio
  C[1]:=0.0;  {Cálculo de C* y D}
  para j:=2 hasta n hacer
    r:=vértice t.q. (r,j)∈A ∧
                    c(r,j)+C[r] es mínimo;
    C[j]:=c(r,j)+C[r];
    D[j]:=r
  fpara;
  P[1]:=1; P[k]:=n; {Construcción del camino}
  para j:=k-1 descendiendo hasta 2 hacer
    P[j]:=D[P[j+1]]
  fpara
fin
```

**Nota:** La eficiencia es la misma si *G* está representado mediante listas de adyacencia inversa.

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- Se desea calcular el producto matricial:

$$M = M_1 M_2 \cdots M_n$$

Como es asociativo, existen varias formas…

(Recordar que el algortimo resultante de la definición del producto de dos matrices $p \times q$ y $q \times r$ necesita $pqr$ multiplicaciones de escalares.)

– Ejemplo: se quiere calcular el producto $ABCD$, de las matrices $A(13\times5)$, $B(5\times89)$, $C(89\times3)$ y $D(3\times34)$.

| | nº multip. |
|---|---|
| $((AB)C)D)$ | 10582 |
| $(AB)(CD)$ | 54201 |
| $(A(BC))D$ | 2856 |
| $A((BC)D)$ | 4055 |
| $A(B(CD))$ | 26418 |

¡El caso más eficiente es casi 19 veces más rápido que el más lento!

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- ¿Cómo hallar el mejor método?
  1. Insertar los paréntesis de todas las formas posibles (significativamente diferentes).
  2. Calcular para cada una el número de multiplicaciones escalares requeridas.

- ¿Cuántas formas posibles $T(n)$ de insertar paréntesis existen en un producto de $n$ matrices?
  - Si cortamos entre la $i$ y la $(i+1)$-ésima:

$$M = (M_1 M_2 \cdots M_i)(M_{i+1} M_{i+2} \cdots M_n)$$

    Entonces tenemos $T(i)T(n\text{-}i)$ formas distintas.

  - Como $i$ puede tomar valores entre 1 y $n$-1:

$$T(n) = \sum_{i=1}^{n-1} T(i)T(n-i), \quad \text{para} \quad n > 1$$

$$T(1) = 1$$

Números de Catalan

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- Los números de Catalan crecen exponencialmente.
  - De hecho puede demostrarse que:

$$T(n) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

Por ejemplo:

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T(n)$ | 1 | 1 | 2 | 5 | 14 | 4862 | 2674440 |

- Luego el método directo no sirve.

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

S. Godbole: "On efficient computation of matrix chain products", *IEEE Transactions on Computers*, 22(9), pp. 864-866, 1973.

- Aplicación del principio de optimalidad:

  Si el mejor modo de realizar el producto exige dividir inicialmente entre las matrices $i$ e $(i+1)$-ésima, los productos

  $M_1 M_2 \cdots M_i$ y $M_{i+1} M_{i+2} \cdots M_n$

  deberán ser realizados de forma óptima para que el total también sea óptimo.

- Método:
  - Construir la matriz $[m_{ij}]$, $1 \le i \le j \le n$, donde $m_{ij}$ da el óptimo (i.e., el número de multiplicaciones escalares requeridas) para la parte $M_i M_{i+1} \cdots M_j$ del producto total.
  - La solución final vendrá dada por $m_{1n}$.

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- Construcción de $[m_{ij}]$, $1 \le i \le j \le n$:
  - Guardar las dimensiones de las $M_i$, $1 \le i \le n$, en un vector $d$, de $0..n$ componentes, de forma que $M_i$ tiene dimensiones $d_{i-1} \times d_i$.
  - La diagonal $s$ de $[m_{ij}]$ contiene los $m_{ij}$ tales que $j-i=s$:

$s = 0$: $\quad m_{i,i} = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$

$s = 1$: $\quad m_{i,i+1} = d_{i-1} d_i d_{i+1}$, para $i = 1, 2, \ldots, n-1$

$1 < s < n$: $\quad m_{i,i+s} = \min_{i \le k \le i+s-1} (m_{ik} + m_{k+1,i+s} + d_{i-1} d_k d_{i+s})$,

para $i = 1, 2, \ldots, n-s$

  - El tercer caso representa que para calcular $M_i M_{i+1} \cdots M_{i+s}$ se intentan todas las posibilidades $(M_i M_{i+1} \cdots M_k)(M_{k+1} M_{k+2} \cdots M_{i+s})$ y se escoge la mejor.
  - De forma más compacta:

$$m_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i = j \\ \min\limits_{i \le k < j} \{m_{ik} + m_{k+1,j} + d_{i-1} d_k d_j\}, & \text{si } i < j \end{cases}$$

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- Para el ejemplo anterior:
  - $A(13\times5)$, $B(5\times89)$, $C(89\times3)$ y $D(3\times34)$
  - Se tiene $d$=(13,5,89,3,34).
  - Para $s$=1: $m_{12}$=5785, $m_{23}$=1335, $m_{34}$=9078.
  - Para $s$=2:

$$\begin{aligned} m_{13} &= \min(m_{11}+m_{23}+13\times5\times3,\ m_{12}+m_{33}+13\times89\times3) \\ &= \min(1530,9256) = 1530 \\ m_{24} &= \min(m_{22}+m_{34}+5\times89\times34,\ m_{23}+m_{44}+5\times3\times34) \\ &= \min(24208,1845) = 1845 \end{aligned}$$

  - Para $s$=3: $m_{14} = \min(\{k=1\}\ m_{11}+m_{24}+13\times5\times34,\ \{k=2\}\ m_{12}+m_{34}+13\times89\times34,\ \{k=3\}\ m_{13}+m_{44}+13\times3\times34) = \min(4055,54201,2856) = 2856$

  - La matriz es:

| $i$ \ $j$ | 1 | 2 | 3 | 4 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 5785 | 1530 | 2856 | $s=3$ |
| 2 | | 0 | 1335 | 1845 | $s=2$ |
| 3 | | | 0 | 9078 | $s=1$ |
| 4 | | | | 0 | $s=0$ |

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- Solución recursiva inmediata:
  - Aplicación de la ecuación recurrente.
  - Problema: complejidad exponencial.

- Almacenamiento de las soluciones de los subproblemas en una tabla:
  - Número de subproblemas: $\Theta(n^2)$.

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

```
algoritmo parentOpt(ent d:vect[0..n]de nat;
                    sal m:vect[1..n,1..n]de nat;
                    sal km:vect[1..n,1..n]de 1..n)
{m es la matriz [m_ij] definida antes;
 km[i,j] guarda el índice k para el que se alcanza
 el mínimo al calcular m[i,j].}
variables i,r,j,k,q:nat;
principio
  para i:=1 hasta n hacer
    m[i,i]:=0
  fpara;
  para r:=2 hasta n hacer
    para i:=1 hasta n-r+1 hacer
      j:=i+r-1;
      m[i,j]:=∞;
      para k:=i hasta j-1 hacer
        q:=m[i,k]+m[k+1,j]+d[i-1]*d[k]*d[j];
        si q<m[i,j]
          entonces
            m[i,j]:=q;
            km[i,j]:=k
        fsi
      fpara
    fpara
  fpara
fin
```

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- Coste en tiempo:
  - $\Theta(n^3)$
- Coste en memoria:
  - $\Theta(n^2)$

# 4.1 Multiplicación de una secuencia de matrices

- ¡Falta hacer el producto!
  - El elemento $km[i,j]$ guarda el valor de $k$ tal que la división óptima de $M_i M_{i+1} \cdots M_j$ parte el producto entre $M_k$ y $M_{k+1}$.
  - Por tanto:

```
función multSec(M:vect[1..n]de matriz;
                km:vect[1..n,1..n]de 1..n;
                i,j:1..n)
               devuelve matriz
variables X,Y:matriz
principio
  si j>i
    entonces
      X:=multSec(M,km,i,km[i,j]);
      Y:=multSec(M,km,km[i,j]+1,j];
      devuelve mult(X,Y)
    sino
      devuelve M[i]
  fsi
fin
```

# 4.1 Comparaciones de secuencias

D. Sankoff y J.B. Kruskal: *Time Wraps, String Edits, and Macromolecules: The Theory and Practice of Sequence Comparison*, Addison-Wesley, 1983.

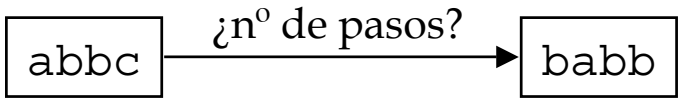
- Problemas relacionados con biología molecular.
- Un problema:

  "Mínimo número de pasos de edición para transformar una cadena en otra."

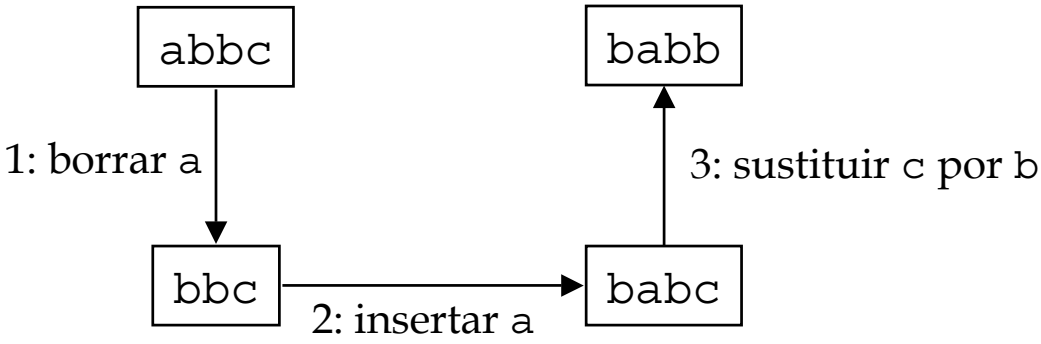
  - Sean $A=a_1a_2\ldots a_n$ y $B=b_1b_2\ldots b_m$ dos cadenas de caracteres.
  - Se quiere modificar $A$ carácter a carácter hasta convertirlo en $B$.
  - Se permiten tres tipos de cambios (pasos de edición) y cada uno tiene coste unidad:
    1. **Insertar** un carácter en la cadena.
    2. **Borrar** un carácter de la cadena.
    3. **Sustituir** un carácter por otro diferente.

# 4.1 Comparaciones de secuencias

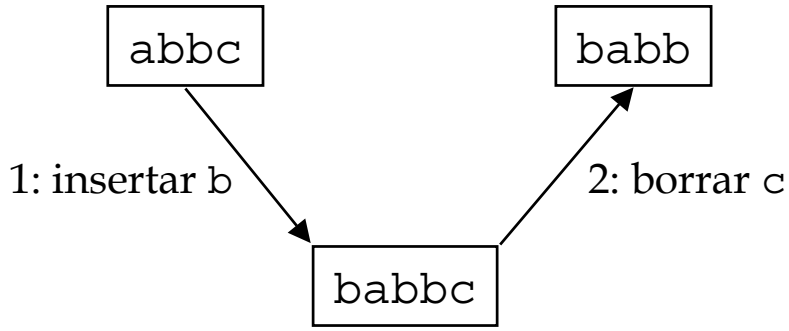
– Ejemplo:




Una solución:




Otra solución (mejor):




❖ Aplicaciones en comparación y mantenimiento de versiones de ficheros:

– Si se tienen varias versiones parecidas de un fichero es más eficiente almacenar sólo la primera versión y para el resto de versiones almacenar los pasos de edición (normalmente inserciones y borrados) desde la primera.

# 4.1 Comparaciones de secuencias

R.A. Wagner y M.J. Fischer:
"The string-to-string correction problem",
*Journal of the ACM*, 21, pp. 168-173, 1974.

- Solución de programación dinámica:
  - Sean $A(i)$ y $B(i)$ las subcadenas prefijo de $A$ y $B$ (i.e., $A(i)=a_1a_2\ldots a_i$, $B(i)=b_1b_2\ldots b_i$).
  - $C(i,j)$ el coste mínimo de transformar $A(i)$ en $B(j)$.
  - Se considera el problema: $A(n) \rightarrow B(m)$

  - Fijémonos en los posibles tratamientos de $a_n$:
    - bien es borrado, y el problema se reduce a transformar $A(n\text{-}1)$ en $B(m)$ y luego borrarlo;
    - bien se le hace coincidir con algún carácter de $B$ anterior a $b_m$, en cuyo caso el problema se reduce a transformar $A(n)$ en $B(m\text{-}1)$ y luego insertar un carácter igual a $b_m$;
    - bien se le sustituye por un carácter igual a $b_m$, y el problema se reduce a transformar $A(n\text{-}1)$ en $B(m\text{-}1)$ y luego sustituir $a_n$;
    - o bien $a_n$ coincide con $b_m$, y entonces basta con transformar $A(n\text{-}1)$ en $B(m\text{-}1)$.

# 4.1 Comparaciones de secuencias

- Si denotamos:

$$c(i,j) = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad a_i = b_j \\ 1, & \text{si} \quad a_i \neq b_j \end{cases}$$

- Se tiene:

$$C(n,m) = \min \begin{cases} C(n-1,m)+1 & \text{(borrando } a_n\text{)} \\ C(n,m-1)+1 & \text{(insertando } b_m\text{)} \\ C(n-1,m-1)+c(n,m) & \text{(otros casos)} \end{cases}$$

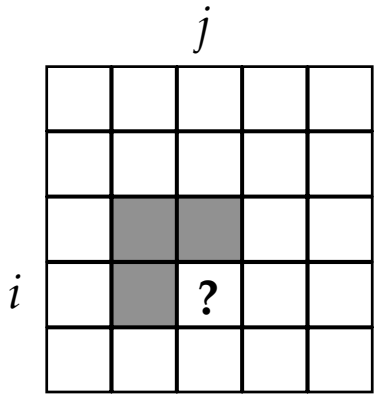
$$C(i,0) = i, \quad \text{for all} \quad i, \ 0 \le i \le n$$

$$C(0,j) = j, \quad \text{for all} \quad j, \ 0 \le j \le m$$

- Solución recursiva obvia: ¡coste exponencial!

- Sin embargo, sólo existen $nm$ subproblemas diferentes ($C(i,j)$, $1 \le i \le n$, $1 \le j \le m$).

- Orden de cálculo:



# 4.1 Comparaciones de secuencias

```
algoritmo compSec(ent A:cad[n];
                  ent B:cad[m];
            sal C:vect[0..n,0..m]de nat;
            sal T:vect[1..n,1..m]de Transf)
{Transf=tipo de las posibles transformaciones;
 Transf=(borrar,insert,sustit,nada)}
variables i,j,x,y,z:nat
principio
  para i:=0 hasta n hacer C[i,0]:=i fpara;
  para j:=0 hasta m hacer C[0,j]:=j fpara;
  para i:=1 hasta n hacer
    para j:=1 hasta m hacer
      x:=C[i-1,j]+1; y:=C[i,j-1]+1;
      si A[i]=B[j]
        entonces
          z:=C[i-1,j-1]
        sino
          z:=C[i-1,j-1]+1
      fsi;
      C[i,j]:=min(x,y,z);
      T[i,j]:=Transf(x,y,z)
      {T[i,j] es el último cambio que da el
       mínimo valor a C[i,j]}
    fpara
  fpara
fin
```

# 4.1 Comparaciones de secuencias

```
algoritmo res(ent i,j:nat)
{Para resolver el problema, ejecutar res(n,m).}
variable k:nat
principio
  selección
    i=0: para k:=1 hasta j hacer
           escribir('Añadir',B[k],'en el
                    lugar',k)
         fpara
    j=0: para k:=1 hasta i hacer
           escribir('Borrar car.n°',k)
         fpara
  otros:
   selección
    T[i,j]=borrar: res(i-1,j);
            escribir('Borrar car.n°',i)
    T[i,j]=insert: res(i,j-1);
            escribir('Insertar car.n°',j,
                'de B tras la posición',i)
    T[i,j]=sustit: res(i-1,j-1);
            escribir('Sustit. car.n°',i,
                'de A por n°',j,'de B')
    T[i,j]=nada: res(i-1,j-1)
   fselección
  fselección
fin
```

# 4.1 Comparaciones de secuencias

- Coste:
  - En tiempo: $\Theta(nm)$
  - En espacio: $\Theta(nm)$

# 4 Caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo

R.W. Floyd:
"Algorithm 97: Shortest path",
*Communications of the ACM*, 5(6), p. 345, 1962.

## ❖ Problema:

Cálculo de los caminos de coste mínimo entre todos los pares de vértices de un grafo dirigido sin ciclos de peso negativo.

## ❖ Principio de optimalidad:

Si $i_1, i_2, \ldots, i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n$ es un camino de coste mínimo de $i_1$ a $i_n$, entonces:

- $i_1, i_2, \ldots, i_k$ es un camino de coste mínimo de $i_1$ a $i_k$, y
- $i_k, i_{k+1}, \ldots, i_n$ es un camino de coste mínimo de $i_k$ a $i_n$.

## ❖ Aplicación del principio:

- Si $k$ es el vértice intermedio de mayor índice en el camino óptimo de $i$ a $j$, entonces el subcamino de $i$ a $k$ es un camino óptimo de $i$ a $k$ que, además, sólo pasa por vértices de índice menor que $k$.
- Lo análogo ocurre con el subcamino de $k$ a $j$.

# 4 Caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo

- Sea $C(i,j)$ el coste de la arista $(i,j)$ o infinito si esa arista no existe. Sea $C(i,i)=0$.
- Sea $D_k(i,j)$ la longitud (o distancia) del camino de coste mínimo de $i$ a $j$ que no pasa por ningún vértice de índice mayor que $k$.
- Sea $D(i,j)$ la longitud del camino de coste mínimo de $i$ a $j$.
- Entonces:

$$D(i,j) = \min \left\{ \min_{1 \le k \le n} \left\{ D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \right\}, C(i,j) \right\}$$

$$D_0(i,j) = C(i,j), \quad 1 \le i \le n, \ 1 \le j \le n$$

- Ahora, un camino óptimo de $i$ a $j$ que no pase por ningún vértice de índice mayor que $k$ bien pasa por el vértice $k$ ó no.
  - Si pasa por $k$ entonces:

$$D_k(i,j) = D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j)$$

  - Si no pasa por $k$ entonces ningún vértice intermedio tiene índice superior a $k$-1:

$$D_k(i,j) = D_{k-1}(i,j)$$

# 4 Caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo

- En resumen:
  - Se tiene la siguiente ecuación recurrente que define el método de programación dinámica.

$$D_k(i,j) = \min_{k \geq 1} \left\{ D_{k-1}(i,j),\ D_{k-1}(i,k) + D_{k-1}(k,j) \right\}$$

$$D_0(i,j) = C(i,j), \quad 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n$$

# 4 Caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo

```
{Pre: g es un grafo dirigido etiquetado sin
 ciclos negativos}
función Floyd(g:grafo)
        devuelve vector[vért,vért] de etiq
variables D:vector[vért,vért] de etiq;
          u,v,w:vért; et,val:etiq
principio
  {inicialmente la distancia entre dos vértices
   tiene el valor de la arista que los une;
   las diagonales se ponen a cero}
  para todo v en vért hacer
    para todo w en vért hacer
      D[v,w]:=etiqueta(g,v,w)
                {∞ si no hay arco}
    fpara;
    D[v,v]:=0
  fpara;
  ...
```

# 4 Caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo

```
  ...
  para todo u en vért hacer
    para todo v en vért hacer
      para todo w en vért hacer
        si D[v,u]+D[u,w]<D[v,w]
          entonces D[v,w]:=D[v,u]+D[u,w]
        fsi
      fpara
    fpara
  fpara;
  devuelve D
fin
{Post: D=caminosMínimos(g)}
```

Nota: pivotes(u) devuelve el conjunto de vértices que han sido pivotes en pasos anteriores del algoritmo.

# 4 Caminos mínimos entre todos los pares de nodos de un grafo

- Eficiencia temporal: $\Theta(n^3)$
  - representación con matriz de adyacencia: igual que reiterar Dijkstra (*Algoritmos voraces*, pág. 16), aunque el interior del bucle en Floyd es más simple
  - representación con listas de adyacencia: Dijkstra + colas con prioridad está en $\Theta(an\log n)$
- Espacio:
  - Floyd exige $\Theta(n^2)$ mientras que Dijkstra precisa $\Theta(n)$
- Ejercicio: cálculo de las secuencias de nodos que componen los caminos mínimos
  - si el camino mínimo de $m$ a $n$ pasa primero por $p$ y después por $q$, la secuencia de vértices que forman el camino mínimo de $p$ a $q$ forma parte de la secuencia de vértices que forman el camino mínimo de $m$ a $n$
  - usar un vector bidimensional $C$ indexado por vértices: $C[v,w]$ contiene un nodo $u$ que forma parte del camino mínimo entre $v$ y $w$

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

- Recordar **árbol binario de búsqueda**:
  - La clave de todo nodo es mayor o igual que las de sus descendientes izquierdos y menor que las de sus descendientes derechos.
- El problema:
  - Se tiene un conjunto de claves distintas

    $$w_1 < w_2 < \cdots < w_n$$

    (ordenadas alfabéticamente) que deben almacenarse en un árbol binario de búsqueda.
  - Se conoce la probabilidad $p_i$, $1 \le i \le n$, con la que se pide buscar la clave $w_i$ y su información asociada.
  - Se conoce también la probabilidad $q_i$, $0 \le i \le n$, de búsqueda de una clave inexistente situada entre $w_i$ y $w_{i+1}$ (con el significado obvio para $q_0$ y $q_n$).
  - Se tiene que

    $$\sum_{i=1}^{n} p_i + \sum_{i=0}^{n} q_i = 1$$

  - Se quiere construir un árbol binario de búsqueda para guardar las claves que minimice el número medio de comparaciones para encontrar una clave o para garantizar que no está.

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

- Recordar que la profundidad de la raíz es 0, la de sus hijos es 1, etc.
- Si construimos un árbol en el que la clave $w_i$ está en un nodo de profundidad $d_i$, $1 \le i \le n$, entonces se necesitan $d_i+1$ comparaciones para encontrarla.
- Si con probabilidad $q_i$, $0 \le i \le n$, buscamos una clave que no está en el árbol pero que, en caso de estar, ocuparía un nodo de profundidad $d_i$ entonces se necesitan $d_i$ comparaciones para garantizar que no está.
- Por tanto, el número medio de comparaciones para encontrar una clave o para garantizar que no está (función que queremos minimizar) es:

$$C = \sum_{i=1}^{n} p_i\,(d_i + 1) + \sum_{i=0}^{n} q_i d_i$$

❖ Ejemplo:

$q_i = 0,\ 0 \le i \le 7$

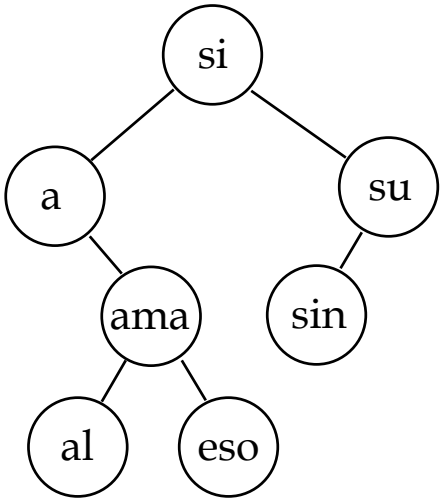
| Palabra | Probabilidad |
|---|---|
| a | 0,22 |
| al | 0,18 |
| ama | 0,20 |
| eso | 0,05 |
| si | 0,25 |
| sin | 0,02 |
| su | 0,08 |

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

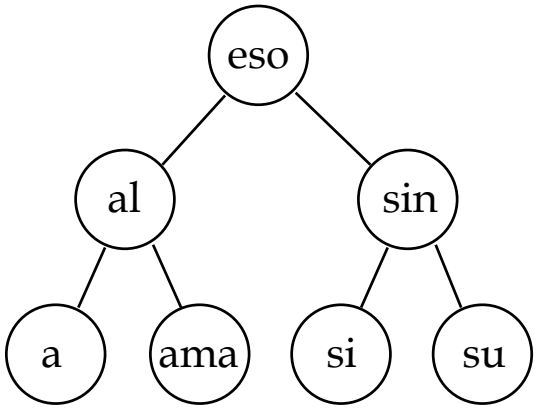
- Solución 1:

  Creada con estrategia **voraz**.

  *C*=2,43




---




- Solución 2:

  Árbol perfectamente equilibrado.

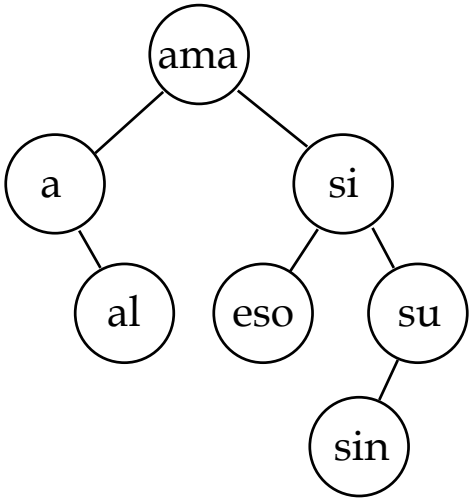
  *C*=2,70

---

- Solución 3:

  Es óptima.

  *C*=2,15



# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

E.N. Gilbert y E.F. Moore: "Variable length encodings", *Bell System Technical Journal*, 38(4), pp. 933-968, 1959.

- Solución de programación dinámica:

  Principio de optimalidad:

  "Todos los subárboles de un árbol óptimo son óptimos con respecto a las claves que contienen."

  - Consideremos un subárbol óptimo que contenga las claves $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_j$.
  - La probabilidad de que una clave buscada esté o debiera estar en ese subárbol es:

$$m_{ij} = \sum_{k=i+1}^{j} p_k + \sum_{k=i}^{j} q_k$$

  - Denotemos por $C_{ij}$ el número medio de comparaciones efectuadas en un subárbol óptimo que contiene las claves $w_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_j$ durante la búsqueda de una clave en el árbol principal (y convenimos en que $C_{ii}$=0).
  - Supongamos ahora que $w_k$ ocupa la raíz de ese subárbol.
  - Sea $C_{ij}^k$ el número medio de comparaciones efectuadas en ese subárbol durante la búsqueda de una clave en el árbol principal.

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

– Entonces:

$$C_{ij}^{k} = m_{ij} + C_{i,k-1} + C_{kj}$$

- $C_{i,k\text{-}1}$ es el nº medio de comparaciones en el subárbol izquierdo.
- $C_{kj}$ es el nº medio de comparaciones en el subárbol derecho.
- $m_{ij}$ es el el nº medio de comparaciones con la raíz.

– Ahora se trata de escoger la raíz de forma que se minimice $C_{ij}$:

$$C_{ij} = m_{ij} + \min_{i<k\le j} \{C_{i,k-1} + C_{kj}\}, \quad \text{si} \quad 0 \le i < j \le n$$

$$C_{ii} = 0, \quad \text{si} \quad 0 \le i \le n$$

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

- El ejemplo:

$q_i = 0, \ 0 \le i \le 7$

| Palabra | Probabilidad |
|---|---|
| a | 0,22 |
| al | 0,18 |
| ama | 0,20 |
| eso | 0,05 |
| si | 0,25 |
| sin | 0,02 |
| su | 0,08 |

$$C_{ij} = m_{ij} + \min_{i<k\le j} \{C_{i,k-1} + C_{kj}\}, \quad \text{si} \quad 0 \le i < j \le n$$

$$C_{ii} = 0, \quad \text{si} \quad 0 \le i \le n$$

$C=$

| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0,22 | 0,58 | 1,02 | 1,17 | 1,83 | 1,89 | 2,15 | 7º |
| 1 | | 0 | 0,18 | 0,56 | 0,66 | 1,21 | 1,27 | 1,53 | 6º |
| 2 | | | 0 | 0,20 | 0,30 | 0,80 | 0,84 | 1,02 | 5º |
| 3 | | | | 0 | 0,05 | 0,35 | 0,39 | 0,57 | 4º |
| 4 | | | | | 0 | 0,25 | 0,29 | 0,47 | 3º |
| 5 | | | | | | 0 | 0,02 | 0,12 | 2º |
| 6 | | | | | | | 0 | 0,08 | 1º |
| 7 | | | | | | | | 0 | |

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

```
tipos probP=vector[1..n] de real;
      probQ=vector[0..n] de real;
      matC=vector[0..n,0..n] de real;
      matSol=vector[0..n,0..n] de entero
```

```
algoritmo abbÓpt(ent p:probP; ent q:probQ;
                 sal C:matC; sal r:matSol)
{C es la matriz definida previamente.
 En cada componente i,j de r se guarda el k
 para el que C[i,j] resulta mínimo.}
variables i,j,k,d:entero;
          min,aux:real;
          m:matC
principio
  para i:=0 hasta n hacer
    C[i,i]:=0;
    m[i,i]:=q[i];
    para j:=i+1 hasta n hacer
      m[i,j]:=m[i,j-1]+p[j]+q[j]
    fpara
  fpara;
  para j:=1 hasta n hacer
    C[j-1,j]:=m[j-1,j];
    r[j-1,j]:=j
  fpara;
  {Ya están determinados los árboles de 1 nodo.}
  ...
```

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

```
  ...
  para d:=2 hasta n hacer
    para j:=d hasta n hacer
      i:=j-d;
      min:=maxEntero;
      para k:=i+1 hasta j hacer
        aux:=C[i,k-1]+C[k,j];
        si aux<min entonces
          min:=aux;
          r[i,j]:=k
        fsi
      fpara;
      C[i,j]:=m[i,j]+min
    fpara
  fpara
fin
```

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

```
tipos vectClaves=vector[1..n] de cadena;
      árbol=↑nodo;
      nodo=registro
             dato:cadena;
             iz,de:árbol
           freg
```

```
algoritmo creaABB(ent w:vectClaves;
                  ent r:matSol;
                  sal a:árbol)

  algoritmo creaRec(sal a:árbol;
                    ent i,j:entero)
  principio
    si i=j entonces a:=nil
    sino
      nuevoDato(a);
      a↑.dato:=w[r[i,j]];
      creaRec(a↑.iz,i,r[i,j]-1);
      creaRec(a↑.de,r[i,j],j)
    fsi
  fin

principio
  creaRec(a,0,n)
fin
```

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

- Complejidad:

  $\Theta(n^3)$, usando $\Theta(n^2)$ posiciones de memoria.

- Es posible transformar automáticamente ciertos algoritmos cúbicos de programación dinámica, como este, en algoritmos cuadráticos…

F.F. Yao: "Efficient dynamic programming using quadrangle inequalities",
*Proceedings of the 12th Annual ACM Symposium* on the Theory of Computing, pp. 429-435, 1980.

# 4.1 Árboles binarios de búsqueda óptimos

D.E. Knuth: "Optimum binary search trees", *Acta Informatica*, 1, pp. 14-25, 1971.

- En este caso concreto basta con demostrar que:

  `r[i,j-1]` ≤ `r[i,j]` ≤ `r[i+1,j]`, si `j-i`≥2

  (por inducción en `j-i` [Knu87, p. 492])

  Ahora, el coste de los dos bucles internos de `abbÓpt` es:

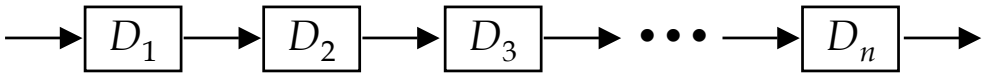
$$\sum_{\substack{d \le j \le n \\ i = j-d}} \left( r[i+1, j] - r[i, j-1] + 1 \right)$$

$$= r[n-d+1, n] - r[0, d-1] + n - d + 1 < 2n$$

  Por tanto, el coste es $\Theta(n^2)$.

# 4 Un problema de fiabilidad de sistemas

- El problema:
  - Diseñar un sistema compuesto de varios dispositivos conectados en serie.




  - Sea $r_i$ la **fiabilidad** de $D_i$, i.e., la probabilidad de que funcione correctamente.

  - Entonces, la fiabilidad del sistema sistema entero es:

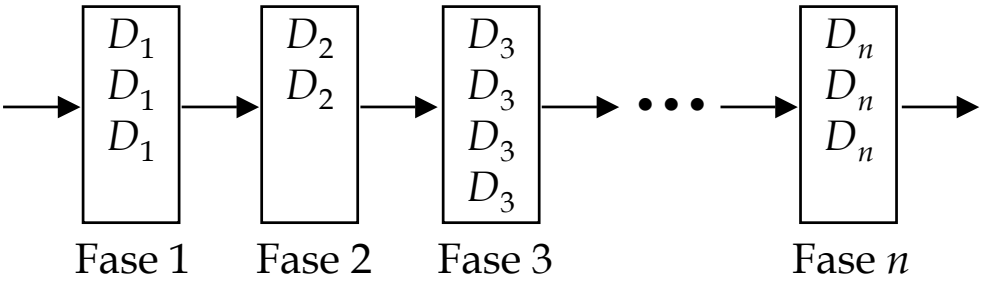
$$\prod_{i=1}^{n} r_i$$

  - Por ejemplo, si $n$=10 y $r_i$=0,99, $1 \leq i \leq 10$, la fiabilidad de cada dispositivo es muy alta y sin embargo

$$\prod_{i=1}^{10} r_i = 0,904$$

# 4.1 Un problema de fiabilidad de sistemas

- Una forma de aumentar la fiabilidad es duplicar los dispositivos (en paralelo).




- Si la fase $i$ contiene $m_i$ copias de $D_i$, la probabilidad de que toda la fase falle es

$$(1-r_i)^{m_i}$$

- Luego la fiabilidad de la fase $i$ es

$$1-(1-r_i)^{m_i}$$

- Por tanto, si $r_i$=0,99 y $m_i$=2, la fiabilidad de la fase $i$ es 0,9999.
- En realidad, la fiabilidad de la fase $i$ es algo menor que $1-(1-r_i)^{m_i}$ (las copias de un mismo dispositivo no son completamente independientes pues su diseño es común, por ejemplo); si denotamos la fiabilidad de la fase $i$ por $\phi_i(m_i)$ entonces la fiabilidad del sistema es:

$$\prod_{1\le i\le n}\phi_i(m_i)$$

# 4 Un problema de fiabilidad de sistemas

- El problema: maximizar la fiabilidad duplicando los dispositivos y con alguna limitación en el coste.

$$\text{maximizar} \quad \prod_{1 \le i \le n} \phi_i(m_i)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{1 \le i \le m} c_i m_i \le c$$

$$m_i \ge 1 \text{ y entero} \;,\; 1 \le i \le n$$

  Donde $c_i$ es el coste de cada unidad de dispositivo $i$.

- Como $c_i > 0$ y $m_j \ge 1$, entonces $1 \le m_i \le u_i$ con

$$u_i = \left\lfloor \left( c + c_i - \sum_{j=1}^{n} c_j \right) \Big/ c_i \right\rfloor$$

# 4 Un problema de fiabilidad de sistemas

– Una solución óptima $m_1, m_2, \ldots, m_n$ es el resultado de una secuencia de decisiones, una por cada $m_i$.

– Denotemos:

$$f_i(x) = \text{máximo} \quad \prod_{1 \le j \le i} \phi_j(m_j)$$

$$\text{sujeto a} \quad \sum_{1 \le j \le i} c_j m_j \le x$$

$$1 \le m_j \le u_j, \quad 1 \le j \le i$$

Entonces el valor de una solución óptima es $f_n(c)$.

# 4.1 Un problema de fiabilidad de sistemas

- La última decisión requiere elegir $m_n$ de entre $\{1,2,3,\ldots,u_n\}$.
- Una vez tomada la última decisión, las restantes decisiones deben utilizar el resto de fondos $c\text{-}c_n m_n$ de forma óptima.
- Se cumple el principio de optimalidad y

$$f_n(c) = \max_{1 \le m_n \le u_n} \left\{ \phi_n(m_n) \;\; f_{n-1}(c - c_n m_n) \right\}$$

- En general, para $f_i(x)$, $i \ge 1$, se tiene:

$$f_i(x) = \max_{1 \le m_i \le u_i} \left\{ \phi_i(m_i) \;\; f_{i-1}(x - c_i m_i) \right\}$$

$$f_0(x) = 1, \text{ para todo } \quad x, \;\; 0 \le x \le c$$

- Se resuelve de forma similar al problema de la mochila 0-1 (ejercicio).

# 4 *El problema del viajante de comercio*

- Recordar:

  - Encontrar un recorrido de longitud mínima para un viajante que tiene que visitar varias ciudades y volver al punto de partida, conocida la distancia existente entre cada dos ciudades.

  - Es decir, dado un grafo dirigido con arcos de longitud no negativa, se trata de encontrar un circuito de longitud mínima que comience y termine en el mismo vértice y pase exactamente una vez por cada uno de los vértices restantes (circuito *hamiltoniano)*.

# 4 El problema del viajante de comercio

- Sean $G=(V,A)$ un grafo orientado,
  $V=\{1,2,\ldots,n\}$,
  $L_{ij}$ la longitud de $(i,j)\in A$,
  $L_{ij}=\infty$ si no existe el arco $(i,j)$.

- El circuito buscado empieza en el vértice 1.
  Se compone de $(1,j)$, con $j\neq 1$, seguido de un camino de $j$ a 1 que pasa exactamente una vez por cada vértice de $V\setminus\{1,j\}$.

- Principio de optimalidad: si el circuito es óptimo, el camino de $j$ a 1 debe serlo también.

- Sea $S\subseteq V\setminus\{1\}$ un subconjunto de vértices e $i\in V\setminus S$ un vértice;
  llamamos $g(i,S)$ a la longitud del camino mínimo desde $i$ hasta 1 que pase exactamente una vez por cada vértice de $S$.
  Entonces:

$$\text{longitud del circuito óptimo} = g(1,V\setminus\{1\}) = \min_{2\leq j\leq n}\left\{L_{1j}+g(j,V\setminus\{1,j\})\right\}$$

# 4.1 El problema del viajante de comercio

– Más en general, si $i \neq 1$, $S \neq \emptyset$ e $i \notin S$:

$$g(i,S) = \min_{j \in S} \left\{ L_{ij} + g(j, S \setminus \{j\}) \right\} \qquad (*)$$

Además:

$$g(i,\emptyset) = L_{i1}, \quad i = 2,3,\ldots,n$$

– Método de resolución:

- Usar (*) y calcular $g$ para todos los conjunto $S$ con un solo vértice (distinto del 1).
- Volver a usar (*) y calcular $g$ para todos los conjuntos $S$ de dos vértices (distintos del 1) y así sucesivamente.
- Cuando se conoce el valor de $g$ para todos los conjuntos $S$ a los que sólo les falta un vértice (distinto del 1) basta calcular $g(1, V \setminus \{1\})$.

# 4 El problema del viajante de comercio

- Ejemplo. Sea $G$ el grafo completo de cuatro vértices con longitudes:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 5 & 0 & 9 & 10 \\ 6 & 13 & 0 & 12 \\ 8 & 8 & 9 & 0 \end{bmatrix}$$

  - Inicialización:

    $g(2,\emptyset) = 5; \quad g(3,\emptyset) = 6; \quad g(4,\emptyset) = 8.$

    Usar (*) para obtener:

    $g(2,\{3\}) = L_{23} + g(3,\emptyset) = 15;$
    $g(2,\{4\}) = L_{24} + g(4,\emptyset) = 18;$

    $g(3,\{2\}) = 18; \quad g(3,\{4\}) = 20;$
    $g(4,\{2\}) = 13; \quad g(4,\{3\}) = 15.$

# 4 El problema del viajante de comercio

- Ahora, utilizando de nuevo (*) para conjuntos de dos elementos:

$$g(2,\{3,4\}) = \min\left\{L_{23} + g(3,\{4\}),\ L_{24} + g(4,\{3\})\right\} =$$

$$= \min\{29, 25\} = 25;$$

$$g(3,\{2,4\}) = \min\left\{L_{32} + g(2,\{4\}),\ L_{24} + g(4,\{2\})\right\} =$$

$$= \min\{31, 25\} = 25;$$

$$g(4,\{2,3\}) = \min\left\{L_{42} + g(2,\{3\}),\ L_{43} + g(3,\{2\})\right\} =$$

$$= \min\{23, 27\} = 23.$$

- Finalmente:

$$\begin{aligned} g(1,\{2,3,4\}) &= \min\{\ L_{12} + g(2,\{3,4\}), \\ &\qquad\quad L_{13} + g(3,\{2,4\}), \\ &\qquad\quad L_{14} + g(4,\{2,3\})\ \} = \\ &= \min\{\ 35, 40, 43\ \} = 35. \end{aligned}$$

# 4 El problema del viajante de comercio

- Si además se quiere saber cómo se construye el circuito óptimo:

  Utilizar una función adicional

  $J(i,S)$ es el valor de $j$ que minimiza $g(i,S)$ al aplicar la fórmula (*).

- En el ejemplo:

  $J(2,\{3,4\}) = 4$;  $J(3,\{2,4\}) = 4$;
  $J(4,\{2,3\}) = 2$;  $J(1,\{2,3,4\}) = 2$.

  Y el circuito óptimo será pues:

  $1 \rightarrow J(1,\{2,3,4\}) = 2$
  $\rightarrow J(2,\{3,4\}) = 4$
  $\rightarrow J(4,\{3\}) = 3$
  $\rightarrow 1$

# 4 El problema del viajante de comercio

- Coste del algoritmo:
  - cálculo de $g(j,\emptyset)$: $n$-1 consultas a una tabla,
  - cálculo de los $g(j,S)$ tales que $1 \le \text{card}(S) = k \le n-2$:

$$(n-1)\binom{n-2}{k}k \text{ sumas en total} \quad ,$$

  - cálculo de $g(1,V\setminus\{1\})$: $n$-1 sumas.

→ Tiempo de cálculo:

$$\Theta\left(2(n-1)+\sum_{k=1}^{n-2}(n-1)k\binom{n-2}{k}\right)=\Theta\left(n^2 2^n\right)$$

Puesto que $\displaystyle\sum_{k=1}^{r} k\binom{r}{k} = r\,2^{r-1}$

(Este tiempo es mejor que $\Omega(n!)$ que resultaría de la estrategia de fuerza bruta, pero…)

  - Coste en espacio (para conservar $g$ y $J$): $\Omega(n2^n)$

# 4 El problema del viajante de comercio

- Para hacernos una idea del coste…

| número de vértices $n$ | tiempo fuerza bruta $n!$ | tiempo prog. dinámica $n^2 2^n$ | espacio prog. dinámica $n2^n$ |
|---|---|---|---|
| 5 | 120 | 800 | 160 |
| 10 | 3628800 | 102400 | 10240 |
| 15 | $1,31 \times 10^{12}$ | 7372800 | 491520 |
| 20 | $2,43 \times 10^{18}$ | 419430400 | 20971520 |

# 4 El problema del viajante de comercio

- Implementación recursiva ineficiente:

```
función g(i,S) devuelve nat
variables másCorto,distancia,j:nat
principio
  si S=∅
    entonces
      devuelve L[i,1]
    sino
      másCorto:=∞;
      para todo j en S hacer
        distancia:=L[i,j]+g(j,S\{j});
        si distancia<másCorto
          entonces
            másCorto:=distancia
        fsi
      fpara;
      devuelve másCorto
  fsi
fin
```

Se calcula repetidas veces el mismo valor de $g$: $\Omega((n\text{-}1)!)$

# 4 El problema del viajante de comercio

- Utilización de una "función con memoria":

```
{se usa una tabla gtab cuyos elementos se
 inicializan con -1}

función g(i,S) devuelve nat
variables másCorto,distancia,j:nat
principio
  si S=∅ entonces devuelve L[i,1]
  sino
    si gtab[i,S]≥0
      entonces devuelve gtab[i,S]
    sino
      másCorto:=∞;
      para todo j en S hacer
        distancia:=L[i,j]+g(j,S\{j});
        si distancia<másCorto
          entonces másCorto:=distancia
        fsi
      fpara;
      gtab[i,S]:=másCorto;
      devuelve másCorto
    fsi
  fsi
fin
```

# 4.1 Planificación de trabajos

- El problema:

  Sea un sistema en el que la realización de un conjunto de trabajos requiere la ejecución por parte de un conjunto de agentes (o procesadores) de una serie de tareas diferentes para cada trabajo.

  - $n$ trabajos requiriendo cada uno $m$ tareas:

    $$T_{1i}, T_{2i}, \ldots, T_{mi}, 1 \leq i \leq n$$

  - la tarea $T_{ji}$ la realiza el procesador $P_j$, $1 \leq j \leq m$, y requiere un tiempo $t_{ji}$

- Planificación para los $n$ trabajos:

  Es una asignación de tareas a intervalos de tiempo en los procesadores.

  - la tarea $T_{ji}$ debe asignarse a $P_j$
  - un procesador no puede tener más de una tarea asignada en cada instante de tiempo
  - para todo trabajo $i$, el procesamiento de $T_{ji}$, $j>1$, no puede empezar hasta que $T_{j-1,i}$ haya terminado

# 4.1 Planificación de trabajos

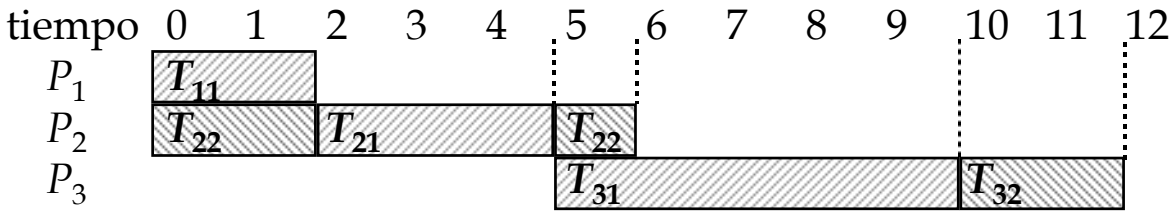
- Ejemplo:

  Se tiene que planificar la ejecución de dos trabajos en tres procesadores, de forma que los tiempos de cada tarea vienen dados por:

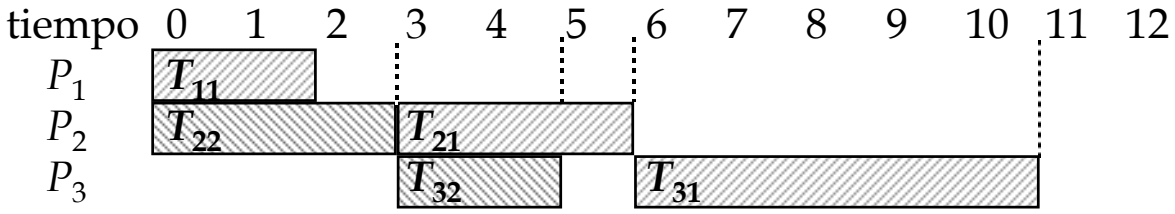
$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

  Dos planificaciones posibles:

**(a)**




**(b)**




  La planificación (b) se dice no apropiativa (*non-preemptive*) porque el procesamiento de una tarea no se interrumpe hasta que ésta ha terminado.

  La planificación (a) se dice apropiativa (*preemptive*) porque el trabajo 1 se apropia del procesador 2 antes de que éste termine con el trabajo 2.

# 4.1 Planificación de trabajos

– El tiempo de terminación del trabajo $i$ en la planificación $S$ es el instante, $f_i(S)$, en que todas las tareas del trabajo $i$ han terminado.

En el ejemplo (a), $f_1(S_a)$=10 y $f_2(S_a)$=12.
En el ejemplo (b), $f_1(S_b)$=11 y $f_2(S_b)$=5.

– El tiempo de terminación, $f(S)$, de la planificación $S$ es:

$$F(S) = \max_{1 \le i \le n} \left\{ f_i(S) \right\}$$

– El **tiempo medio de terminación**, MFT($S$), se define como:

$$\mathrm{MFT}(S) = \frac{1}{n} \sum_{1 \le i \le n} f_i(S)$$

# 4.4 Planificación de trabajos

- Planificación con tiempo de terminación óptimo (OFT) para un conjunto de trabajos:

  es una planificación no apropiativa, $S$, para la que $F(S)$ es mínimo entre todas las planificaciones no apropiativas.

- Planificación apropiativa y con tiempo de terminación óptimo (POFT):

  es una planificación apropiativa, $S$, para la que $F(S)$ es mínimo entre todas las planificaciones apropiativas.

- Planificación con tiempo medio de terminación óptimo (OMFT):

  es una planificación no apropiativa, $S$, para la que MFT($S$) es mínimo entre todas las planificaciones no apropiativas.

- Planificación apropiativa y con tiempo medio de terminación óptimo (POMFT):

  es una planificación apropiativa , $S$, para la que MFT($S$) es mínimo entre todas las planificaciones apropiativas.

# 4.4 Planificación de trabajos

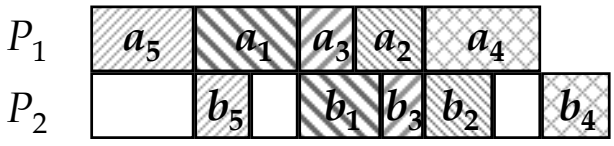
- El cálculo de OFT y POFT para $m$>2 y el cálculo de OMFT es computacionalmente difícil (es *NP-duro*).
- El cálculo de OFT para $m$=2 puede hacerse mediante programación dinámica.

❖ Caso $m$=2:

- Denotemos $T_{1i}$ como $a_i$ y $T_{2i}$ como $b_i$.

- Una planificación está completamente especificada fijando una permutación de los trabajos en uno de los procesadores (coincidirá con el otro procesador).
  Cada tarea empezará tan pronto como sea posible.

  Ejemplo con 5 trabajos:




planificación (5,1,3,2,4)

# 4.1 Planificación de trabajos

- Supongamos, para simplificar, que $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$
  (si hay trabajos con $a_i = 0$, se construye primero la planificación óptima para los trabajos con $a_i \neq 0$ y después se añaden delante los trabajos con $a_i = 0$).

- Principio de optimalidad:

  Una permutación (planificación) óptima es tal que, fijado el primer trabajo de la permutación, el resto de la permutación es óptimo con respecto al estado en que quedan los dos procesadores después de terminar el primer trabajo.

# 4.4 Planificación de trabajos

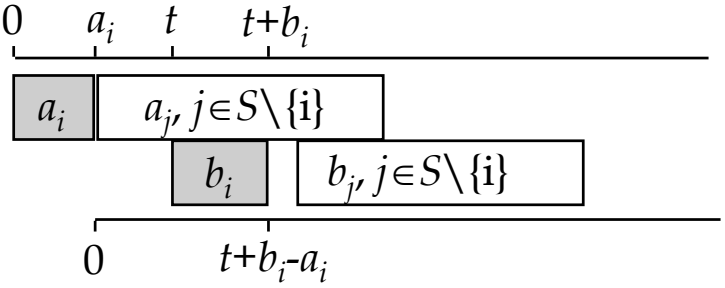
– Sea $g(S,t)$ la longitud (duración) de una planificación óptima para el subconjunto de trabajos $S$ suponiendo que el procesador 2 no estará disponible hasta el instante $t$.

Entonces:

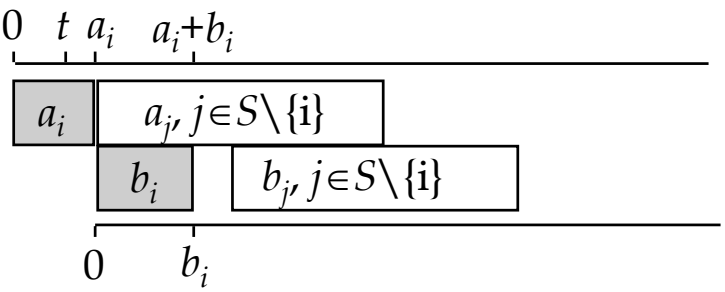
$$g(S,t) = \min_{i \in S} \left\{ a_i + g\left(S \setminus \{i\}, b_i + \max\{t - a_i, 0\}\right) \right\}$$

con $g(\emptyset,t) = \max\{t,0\}$ y $a_i \neq 0$, $1 \leq i \leq n$.

caso $t \geq a_i$:




caso $t < a_i$:



# 4.4 Planificación de trabajos

- La ecuación recursiva resultante podría resolverse de forma análoga a la del problema del viajante de comercio, pero existe una solución mejor…
- Supongamos que *i* y *j* son los dos primeros trabajos (y en ese orden) en la planificación óptima del subconjunto *S*; entonces:

$$g(S,t) = a_i + g(S \setminus \{i\}, b_i + \max\{t - a_i, 0\}) =$$

$$= a_i + a_j + g(S \setminus \{i,j\}, \underbrace{b_j + \max\{b_i + \max\{t - a_i, 0\} - a_j, 0\}}_{t_{ij}})$$

Pero: $t_{ij} = b_j + \max\{b_i + \max\{t - a_i, 0\} - a_j, 0\} =$

$$= b_j + b_i - a_j + \max\{\max\{t - a_i, 0\}, a_j - b_i\} =$$

$$= b_j + b_i - a_j + \max\{t - a_i, a_j - b_i, 0\} =$$

$$= b_j + b_i - a_j - a_i + \max\{t, a_i + a_j - b_i, a_i\}$$

Si los dos primeros trabajos fueran *j* e *i*:

$$g'(S,t) = a_j + a_i + g'(S \setminus \{j,i\}, b_i + b_j - a_i - a_j + \max\{t, a_j + a_i - b_j, a_j\})$$

# 4.4 Planificación de trabajos

- Entonces:

$$g(S,t) \le g'(S,t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \max\{t, a_i + a_j - b_i, a_i\} \le \max\{t, a_j + a_i - b_j, a_j\}$$

Para que esto sea cierto para todo valor de *t*, se precisa:

$$\max\{a_i + a_j - b_i, a_i\} \le \max\{a_j + a_i - b_j, a_j\}$$

Es decir:

$$a_i + a_j + \max\{-b_i, -a_j\} \le a_j + a_i + \max\{-b_j, -a_i\}$$

O sea:

$$\min\{b_i, a_j\} \ge \min\{b_j, a_i\} \qquad (*)$$

- Luego existe una planificación óptima en la que cada par (*i,j*) de trabajos adyacentes verifica (*).
- Puede demostrarse que todas las planificaciones que verifican (*) tienen la misma longitud.

  Por tanto, basta generar una permutación para la que se cumpla (*) para todo par de trabajos adyacentes.

# 4.1 Planificación de trabajos

- Ahora, si

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n\} = a_i$$

  Entonces el trabajo $i$ debería ser el primero en una planificación óptima.
- En cambio, si

$$\min\{a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots b_n\} = b_j$$

  Entonces el trabajo $j$ debería ser el último en una planificación óptima.

- Luego podemos decidir la posición de uno de los trabajos (el primero o el último).

  Repitiendo el proceso, se puede construir la planificación óptima.

# 4.1 Planificación de trabajos

- Por tanto la solución es:

  i) ordenar los $a_i$ y $b_i$ en orden no decreciente;

  ii) si el siguiente número de la secuencia es $a_i$ y el trabajo $i$ no ha sido planificado todavía, planificar el trabajo $i$ en la posición más a la izquierda de entre los que restan;
  si el siguiente número es $b_j$ y el trabajo $j$ no ha sido planificado todavía, planificar el trabajo $j$ en la posición más a la derecha de entre los que restan;

  (nótese que el algoritmo sirve también si hay trabajos con $a_i$=0)

# 4.4 Planificación de trabajos

- Ejemplo:
  - Sean $n$=4, $(a_1,a_2,a_3,a_4) = (3,4,8,10)$ y $(b_1,b_2,b_3,b_4) = (6,2,9,15)$.
  - La secuencia ordenada de los $a_i$ y los $b_i$ es: $(b_2,a_1,a_2,b_1,a_3,b_3,a_4,b_4) = (2,3,4,6,8,9,10,15)$.
  - Sea $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ la secuencia óptima.
    - Como el número menor es $b_2$, entonces $\sigma_4$=2.
    - El siguiente número es $a_1$ luego $\sigma_1$=1.
    - El siguiente es $a_2$ pero el trabajo 2 ya ha sido planificado.
    - El siguiente es $b_1$ pero 1 ya ha sido planificado.
    - El siguiente es $a_3$ luego hacemos $\sigma_2$=3.
    - Por tanto, $\sigma_3$=4.

# 4.4 Planificación de trabajos

- Coste: $O(n \log n)$

- Nótese que la solución directa de

$$g(S,t) = \min_{i \in S} \left\{ a_i + g\left(S \setminus \{i\}, b_i + \max\{t - a_i, 0\}\right) \right\}$$

hubiera llevado al menos $O(2^n)$, que es el número de subconjuntos $S$ diferentes para los que habría que calcular $g(S,t)$.

# 4.1 Una competición internacional

- El problema:

  Dos equipos $A$ y $B$ se enfrentan un máximo de $2n$-1 veces, ganando el primer equipo que acumule $n$ victorias.

  Supongamos que no es posible un partido nulo, que los resultados de cada partido son independientes y que hay una probabilidad constante $p$ de que $A$ gane un partido y $q = 1-p$ de que lo gane $B$.

  ¿Cuál es la probabilidad, a priori, de que gane $A$?

- El planteamiento:
  - Sea $P(i,j)$ la probabilidad de que $A$ gane la competición sabiendo que le faltan todavía $i$ victorias y a $B$ le faltan $j$.
  - Entonces, antes del primer partido, la probabilidad de que $A$ gane la competición es $P(n,n)$.
  - Si $A$ ya ha acumulado todas las victorias necesarias entonces es el ganador de la competición, es decir: $P(0,j) = 1$, $1 \leq j \leq n$.
  - Igualmente, $P(i,0) = 0$, para $1 \leq i \leq n$.
  - La ecuación recurrente es:

    $$P(i,j) = pP(i-1,j) + qP(i,j-1), \text{ para } i,j \geq 1.$$

# 4.1 Una competición internacional

- La solución directa:

```
función P(i,j) devuelve real
{pp (pq) es la probabilidad de que gane A (B)}
principio
  si i=0
    entonces
      devuelve 1
    sino
      si j=0
        entonces
          devuelve 0
        sino
          devuelve pp*P(i-1,j)+pq*P(i,j-1)
      fsi
  fsi
fin
```

# 4.4 Una competición internacional

- Coste de la solución directa:
  - Sea $T(k)$ el tiempo necesario en el caso peor para calcular $P(i,j)$ con $i+j=k$.

$$T(1) = c$$

$$T(k) \leq 2T(k-1) + d, \quad k > 1$$

    donde $c$ y $d$ son dos constantes.
  - Luego, $T(k)$ es $O(2^k)$ y por tanto $T(2n)$ es $O(2^{2n})$.
  - Exactamente el nº de llamadas recursivas es $2\binom{i+j}{j} - 2$
  - Por tanto, el tiempo para calcular $P(n,n)$ es $\Omega(\binom{2n}{n})$ y puede demostrarse que

$$\binom{2n}{n} \geq 2^{2n}/(2n+1)$$

  - En definitiva, el tiempo de la solución directa para calcular $P(n,n)$ es $O(4^n)$ y $\Omega(4^n/n)$.
    Puede demostrarse que el tiempo es $\Theta\left(4^n/\sqrt{n}\right)$

# 4.4 Una competición internacional

- El problema de la solución directa:
  - Como siempre en programación dinámica, se calcula muchas veces el valor de cada $P(i,j)$.
  - Solución mejor: usar una tabla para almacenar los $P(i,j)$.
  - Ejemplo (para $p = q = 1/2$):

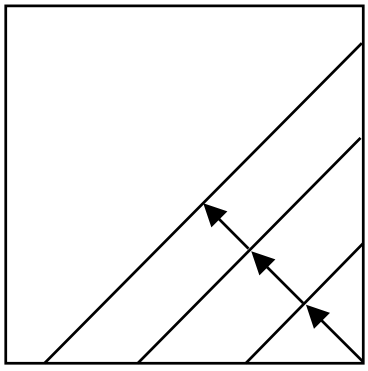
| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 1/2 | 21/32 | 13/16 | 15/16 | 1 | 4 |
| | 11/32 | 1/2 | 11/16 | 7/8 | 1 | 3 |
| | 3/16 | 5/16 | 1/2 | 3/4 | 1 | 2 |
| | 1/16 | 1/8 | 1/4 | 1/2 | 1 | 1 |
| | 0 | 0 | 0 | 0 | | 0 |
| | 4 | 3 | 2 | 1 | 0 | |

$j$ ↑

$i$ ←

$$P(i,j) = pP(i\text{-}1,j) + qP(i,j\text{-}1)$$

la matriz se completa
por diagonales desde
la esquina inferior derecha



# 4.4 Una competición internacional

- La solución:

```
función apuestas(n:natural; p:real)
        devuelve real
variables tabP:vector[0..n,0..n]de real;
          q:real; s,k:natural
principio
  q:=1-p;
  para s:=1 hasta n hacer
    tabP[0,s]:=1; tabP[s,0]:=0;
    para k:=1 hasta s-1 hacer
      tabP[k,s-k]:=p*tabP[k-1,s-k]+
                   q*tabP[k,s-k-1]
    fpara
  fpara;
  devuelve tabP[n,n]
fin
```

# 4.1 Una competición internacional

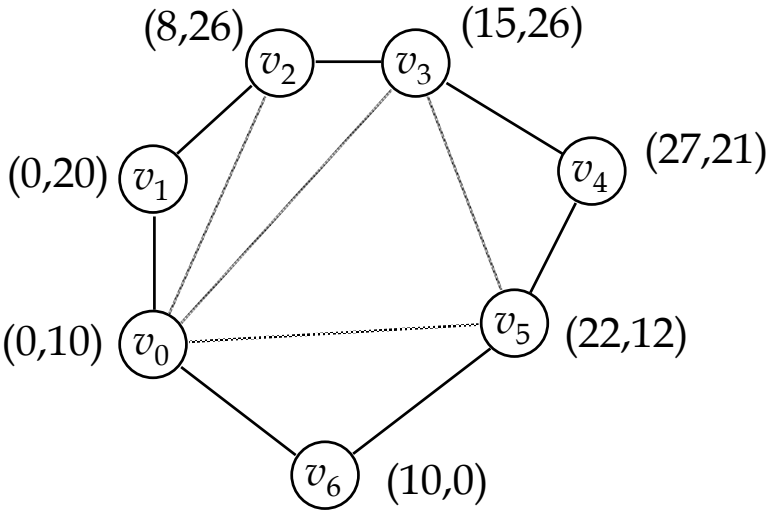
- Coste:
  - En tiempo: $\Theta(n^2)$
  - En espacio: $\Theta(n^2)$

    Pero se puede reducir fácilmente a $\Theta(n)$

# 4 Triangulación de polígonos

- Problema:

  Dados los vértices de un polígono se trata de seleccionar un conjunto de **cuerdas** (líneas entre vértices no adyacentes) de modo que ningún par de cuerdas se cruce entre sí y que todo el polígono quede dividido en triángulos.

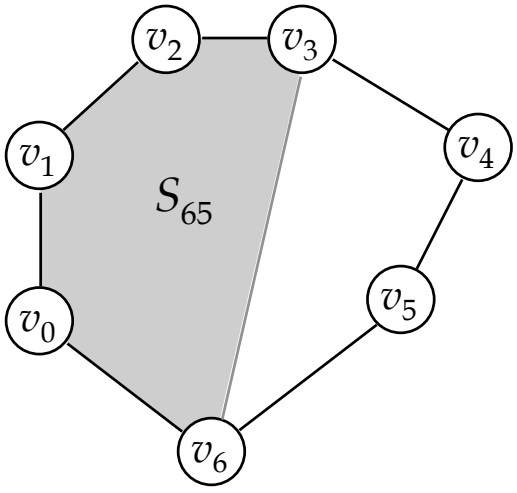



  Además, la longitud total de las cuerdas debe ser mínima (triangulación minimal).

  - Utilidad: se puede emplear para sombrear objetos tridimensionales en una imagen virtual (bidimensional).
  - Otra: interpolación numérica de funciones de dos variables.

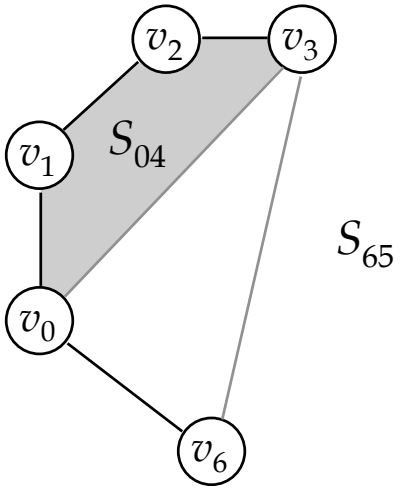
# 4.1 Triangulación de polígonos

- Resolución de programación dinámica:
  - Consideremos un polígono definido por sus vértices $v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}$.
  - Sea $S_{is}$ el subproblema de tamaño $s$ partiendo del vértice $v_i$, es decir, el problema de la triangulación minimal del polígono formado por los $s$ vértices que comienzan en $v_i$ y siguen en el sentido de las agujas del reloj $(v_i, v_{i+1}, \ldots, v_{i+s-1})$, contando con la cuerda $(v_i, v_{i+s-1})$.

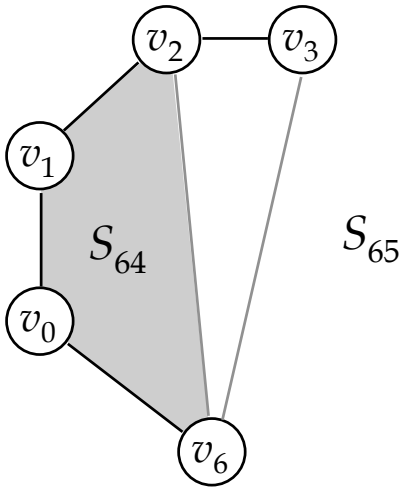


# 4.1 Triangulación de polígonos

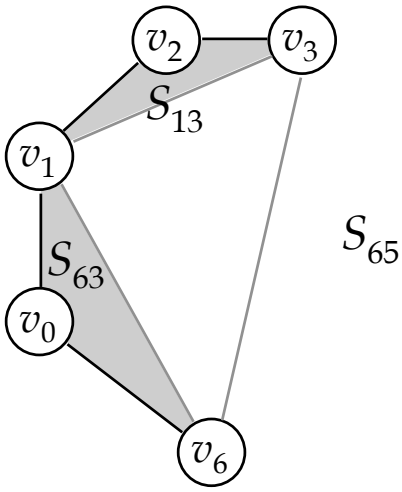
– Ahora, para triangular el polígono $S_{is}$, hay tres posibilidades:




1) Tomar el vértice $v_{i+1}$ para formar un triángulo con las cuerdas $(v_i,v_{i+s-1})$ y $(v_{i+1},v_{i+s-1})$ y con el tercer lado $(v_i,v_{i+1})$, y después resolver el subproblema $S_{i+1,s-1}$.




2) Tomar el vértice $v_{i+s-2}$ para formar un triángulo con las cuerdas $(v_i,v_{i+s-1})$ y $(v_i,v_{i+s-2})$ y con el tercer lado $(v_{i+s-2},v_{i+s-1})$, y después resolver el subproblema $S_{i,s-1}$.




3) Para algún $k$ entre 2 y $s$-3, tomar el vértice $v_{i+k}$ y formar un triángulo con lados $(v_i,v_{i+k})$, $(v_{i+k},v_{i+s-1})$ y $(v_i,v_{i+s-1})$, y después resolver los subproblemas $S_{i,k+1}$ y $S_{i+k,s-k}$.

# 4.1 Triangulación de polígonos

– Por tanto, si denotamos por $C_{is}$ el coste de la triangulación $S_{is}$, se obtiene la siguiente relación recursiva:

$$C_{is} = \min_{1 \le k \le s-2} \{ C_{i,k+1} + C_{i+k,s-k} + D(v_i, v_{i+k}) + D(v_{i+k}, v_{i+s-1}) \}$$

para $0 \le i \le n-1$, $4 \le s \le n$;

donde:

$D(v_p,v_q)$ es la longitud de la cuerda entre los vértices $v_p$ y $v_q$si $v_p$ y $v_q$ no son vértices adyacentes en el polígono; y

$D(v_p,v_q)$ es 0 si $v_p$ y $v_q$ son adyacentes.

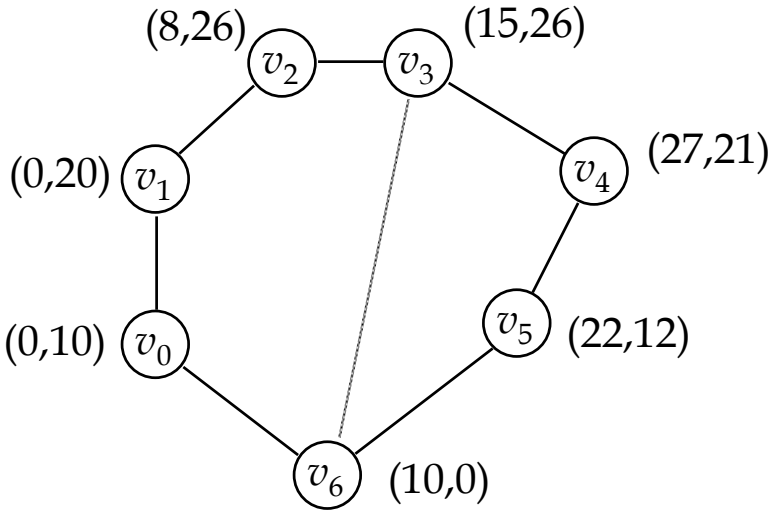
Además, $C_{is} = 0$ para $0 \le i \le n-1$, $2 \le s < 4$.

# 4.1 *Triangulación de polígonos*

- Solución recursiva inmediata:
  - Aplicando la ecuación recurrente anterior
  - Problema: el número de llamadas crece exponencialmente con el número de vértices
  - Sin embargo, sin contar el problema original, sólo hay $n(n\text{-}4)$ subproblemas diferentes que hay que resolver
  - Por tanto, la solución recursiva resuelve muchas veces un mismo subproblema
- Solución eficiente:
  - Utilización de una tabla para almacenar los costes de las soluciones de los subproblemas

# 4.1 Triangulación de polígonos

$$C_{65} = \min\{\ C_{62} + C_{04} + D(v_6, v_0) + D(v_0, v_3),$$
$$C_{63} + C_{13} + D(v_6, v_1) + D(v_1, v_3),$$
$$C_{64} + C_{22} + D(v_6, v_2) + D(v_2, v_3)\ \} =$$
$$= \min\{38{,}09\ ;\ 38{,}52\ ;\ 43{,}97\} = 38{,}09$$




$D(v_2, v_3) = D(v_6, v_0) = 0$
(son aristas y no cuerdas)
$D(v_6, v_2) = 26{,}08;$
$D(v_1, v_3) = 16{,}16;$
$D(v_6, v_1) = 22{,}36;$
$D(v_0, v_3) = 21{,}93$

| s | i = 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 7 | $C_{07}$ = 75,43 | | | | | | |
| 6 | $C_{06}$ = 53,54 | $C_{16}$ = 55,22 | $C_{26}$ = 57,58 | $C_{36}$ = 64,69 | $C_{46}$ = 59,78 | $C_{56}$ = 59,78 | $C_{66}$ = 63,62 |
| 5 | $C_{05}$ = 37,54 | $C_{15}$ = 31,81 | $C_{25}$ = 35,49 | $C_{35}$ = 37,74 | $C_{45}$ = 45,50 | $C_{55}$ = 39,98 | $C_{65}$ = 38,09 |
| 4 | $C_{04}$ = 16,16 **(1)** | $C_{14}$ = 16,16 | $C_{24}$ = 15,65 | $C_{34}$ = 15,65 | $C_{44}$ = 22,69 | $C_{54}$ = 22,69 | $C_{64}$ = 17,89 **(3)** |
| 3 | $C_{03}$ = 0 | $C_{13}$ = 0 **(2)** | $C_{23}$ = 0 | $C_{33}$ = 0 | $C_{43}$ = 0 | $C_{53}$ = 0 | $C_{63}$ = 0 **(2)** |
| 2 | $C_{02}$ = 0 | $C_{12}$ = 0 | $C_{22}$ = 0 **(3)** | $C_{32}$ = 0 | $C_{42}$ = 0 | $C_{52}$ = 0 | $C_{62}$ = 0 **(1)** |

# 4.1 Triangulación de polígonos

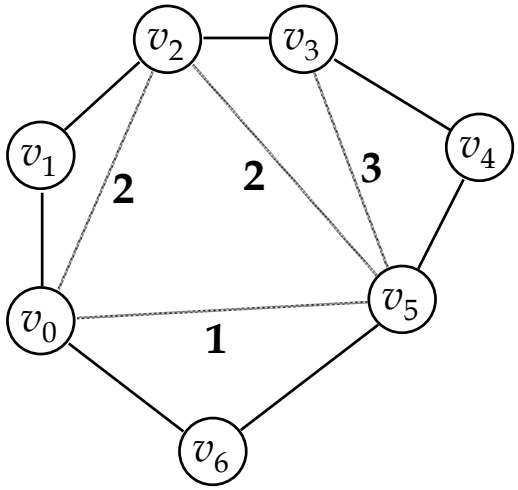
- Hemos calculado el coste de la triangulación mínima pero, ¿cuál es esa triangulación?

  - Para cada posición $(i,s)$ de la tabla se necesita almacenar, además del coste, el valor del índice $k$ que produjo el mínimo.

  - Entonces la solución consta de las cuerdas $(v_i,v_{i+k})$ y $(v_{i+k},v_{i+s-1})$
    (a menos que una de ellas no sea cuerda, porque $k=1$ o $k=s-2$),
    más las cuerdas que estén implicadas por las soluciones de $S_{i,k+1}$ y $S_{i+k,s-k}$.

# 4.1 Triangulación de polígonos

- En el ejemplo:
  - El valor de $C_{07}$ procede de $k$=5. Es decir, el problema $S_{07}$ se divide en $S_{06}$ y $S_{52}$.
    $S_{52}$ es un problema trivial, de coste 0.
    Así, se introduce la cuerda $(v_0,v_5)$, de coste 22'09, y se debe resolver $S_{06}$.




  - El valor de $C_{06}$ procede de $k$=2. Por tanto, el problema se divide en $S_{03}$ y $S_{24}$.
    $S_{03}$ es un triángulo con vértices $v_0$, $v_1$ y $v_2$, luego no precisa ser resuelto, mientras que $S_{24}$ es un cuadrilátero, definido por $v_2$, $v_3$, $v_4$ y $v_5$, y debe ser resuelto.
    Además, hay que incluir los costes de las cuerdas $(v_0,v_2)$ y $(v_2,v_5)$, que son 17'89 y 19'80.
  - El valor de $C_{24}$ se obtiene con $k$=1, dando los subproblemas $S_{22}$ y $S_{33}$, que tienen tamaño menor o igual que tres y, por tanto, coste 0.
    Se introduce la cuerda $(v_3,v_5)$, con coste 15'65.