La Columna de Matemática Computacional

Sección a cargo de

Laureano González Vega

Una generalización del teorema de proyección de Marstrand

por

Elvira Mayordomo

Resumen. Marstrand cuantificó la dimensión de Hausdorff de (casi todas) las proyecciones ortogonales de un conjunto analítico. Recientemente este resultado ha sido generalizado por Lutz y Stull para algunos casos no analíticos, utilizando en su demostración la dimensión efectiva y el principio de punto a conjunto. La dimensión efectiva tiene sus raíces en la computabilidad y la teoría de la información y en este artículo introducimos sus principales ideas a través de la demostración de Lutz y Stull.

1. Introducción

El estudio de la interacción entre proyecciones y dimensión es fundamental en geometría fractal [4, 20]. El teorema de proyección de Marstrand analiza la dimensión de Hausdorff ($\dim_{\mathrm{H}}$) de las proyecciones ortogonales de un conjunto analítico; fue demostrado en 1954 para $\mathbb{R}^2$ [18] y extendido por Mattila a $\mathbb{R}^n$ [19].

Teorema 1.1 (Marstrand 1954, Mattila 1975). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico. Entonces, para casi todo $e \in S^{n-1}$, $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_e E) = \mathrm{mín}\{\dim_{\mathrm{H}}(E), 1\}$.*

Lutz y Stull [16] han generalizado este teorema para el caso de conjuntos regulares, es decir, conjuntos para los que la dimensión de Hausdorff y la dimensión de empaquetamiento coinciden. Recientemente Scott lo ha generalizado aún más para un tipo de conjuntos que incluye todos los casos conocidos, como detallamos más adelante. En ambos casos, el principal ingrediente de la demostración fue la dimensión efectiva de Lutz y su *principio de punto a conjunto* [11], que permite cuantificar exactamente las dimensiones fractales de un conjunto a partir de las dimensiones efectivas. El nombre del principio punto a conjunto se debe a que la dimensión efectiva de un conjunto se define a partir de las dimensiones efectivas de los puntos dentro de dicho conjunto, por lo que el principio permite cuantificar exactamente la dimensión de un conjunto a partir de propiedades individuales de sus puntos.

La dimensión efectiva o algorítmica fue propuesta en 2003 por Jack Lutz [7] y es, por un lado, una efectivización de la dimensión de Hausdorff [5] y, por otro, tiene un gran significado en el contexto de la teoría algorítmica de la información al corresponder a la cantidad de información asintótica punto a punto [6]. El teorema de proyección de Marstrand tiene un sentido claramente geométrico que, en el contexto de la teoría de la información, conecta con las propiedades de cantidad de información mutua referida a dos o más puntos, lo que queda fuera del alcance de este artículo [6].

Pretendemos explicar aquí las ideas principales de la dimensión efectiva y del principio de punto a conjunto usando como caso de uso la generalización del teorema de Marstrand de Lutz y Stull [16]. Existen recientes revisiones del estado del arte en dimensión efectiva mucho más completas [12, 15]; el objetivo de este breve artículo es realizar una introducción al tema dirigida a no expertos en calculabilidad.

Mencionaremos también múltiples resultados obtenidos hasta el momento en teoría de la medida geométrica a partir de la dimensión efectiva, y terminaremos con algunas direcciones de trabajo.

2. La dimensión efectiva

La dimensión efectiva fue introducida por Lutz en [7] como efectivización de la dimensión de Hausdorff en el espacio de Cantor, y más tarde extendida a la dimensión de empaquetamiento [1], al espacio euclídeo [14] y a los espacios métricos separables [13] (algunas revisiones necesariamente parciales pueden encontrarse en [8, 21]). Como su nombre indica, su objetivo inicial era generalizar la dimensión fractal a un concepto efectivo que permitiera, por un lado, el análisis cuantitativo de espacios con dimensión fractal trivial y, por otro lado, definir un concepto de aleatoriedad parcial que generalizara la aleatoriedad algorítmica de Martin-Löf (en ese sentido, el libro [3] puede ser una buena introducción al tema).

Vamos a utilizar en esta introducción la caracterización de [14] como definición de dimensión efectiva en el espacio euclídeo, por lo que primero necesitaremos el concepto de complejidad de Kolmogorov.

2.1. Complejidad de Kolmogorov

Una máquina de Turing universal es aquella que puede simular cualquier otra máquina de Turing con un pequeño sobrecoste en el tamaño de los programas.

Sea $\{0,1\}^{<\mathbb{N}}$ el conjunto de secuencias finitas de $\{0,1\}$. Para cada $w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, la longitud de w, que denotaremos $|w|$, es el número de elementos de w.

Dada una máquina de Turing M y $x \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, $M(x)$ es el resultado de M con entrada x.

Definición 2.1. Una máquina de Turing universal U es una máquina de Turing tal que para cualquier otra máquina de Turing M existe $n \in \mathbb{N}$ de forma que, para cualquier secuencia finita $p \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$,

$$U(0^n p) = M(p).$$

Fijamos una máquina de Turing universal U. La complejidad de Kolmogorov o cantidad de información de una secuencia finita w es la longitud de la entrada más corta que da resultado w.

Definición 2.2. Dado $w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, la complejidad de Kolmogorov de w es $\mathrm{K}(w)$ definida a continuación:

$$\mathrm{K}(w) = \text{mín}\,\{|p| \mid U(p) = w\}\,.$$

Es decir, la complejidad de Kolmogorov nos permite distinguir las secuencias finitas en función de la longitud de su descripción más corta. Por ejemplo, para cada longitud n la secuencia 0^n tiene complejidad logarítmica, mientras que existe una secuencia de longitud n con complejidad al menos n. También es útil considerar la complejidad de Kolmogorov de una secuencia condicionada a otra que corresponde a la cantidad de información necesaria para convertir una secuencia en otra.

Definición 2.3. Dadas $w, y \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, la complejidad de Kolmogorov de w condicionada a y es

$$\mathrm{K}(w|y) = \text{mín}\,\{|p| \mid U(p,y) = w\}\,.$$

Podemos hablar también de complejidad de Kolmogorov de números naturales, números racionales diádicos o puntos diádicos de $\mathbb{Q}^n$ a través de la descripción natural de los mismos como secuencias binarias finitas.

Para el caso de $\mathbb{R}^n$, utilizaremos la complejidad de Kolmogorov de un punto a una determinada precisión.

Definición 2.4. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{N}$, la complejidad de Kolmogorov de x a precisión r es

$$\mathrm{K}_r(x) = \text{mín}\left\{\mathrm{K}(q) \mid q \in \mathbb{Q}^n \text{ y } |x-q| \leq 2^{-r}\right\}.$$

Es decir, dado un punto en el espacio euclídeo, su complejidad de Kolmogorov a precisión r es la longitud de la descripción más corta de un punto racional dentro de la bola de centro x y radio 2^{-r}.

La utilidad de la complejidad de Kolmogorov para secuencias finitas y su relación con otras disciplinas puede consultarse en el libro [6], que contiene una extensa introducción al tema. Solo mencionamos aquí los llamados *argumentos de incompresibilidad*, consistentes en obtener cotas inferiores de la complejidad de Kolmogorov debidas a la abundancia de secuencias no compresibles y las interesantes propiedades de simetría de información basadas en las descomposiciones de la complejidad de dos secuencias a partir de la complejidad condicionada de las mismas.

El caso de la complejidad de un número real con una cierta precisión es mucho más delicado, ya que debe combinar las aproximaciones de números reales con la cantidad de información de las mismas. Por ejemplo, una relación precisa y general entre la complejidad de Kolmogorov de un punto y la de una recta que la contenga permitiría demostrar la conjetura de Kakeya [26].

2.2. Dimensión efectiva

La dimensión efectiva de un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se define como el ratio de su cantidad de información sobre cada precisión.

DEFINICIÓN 2.5. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, la dimensión efectiva de x, que denotaremos $\dim(x)$, es

$$\dim(x) = \liminf_r \frac{\mathrm{K}_r(x)}{r}.$$

A partir de esta definición, para cada punto podemos definir la dimensión efectiva de un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}^n$.

DEFINICIÓN 2.6. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, la dimensión efectiva de E, que denotaremos $\dim(E)$, es

$$\dim(E) = \sup_{x \in E} \dim(x).$$

Una razón sencilla por la que este concepto se considera una efectivización de la dimensión de Hausdorff es que la dimensión efectiva también puede caracterizarse a partir de una versión efectiva de la medida de Hausdorff, siendo la dimensión efectiva de un conjunto E el ínfimo de los s para los que la s-medida efectiva de E es 0 [23]. Esta caracterización es análoga a la definición original de dimensión de Hausdorff [5]. (De hecho, la versión original de dimensión efectiva es más cercana a esta última caracterización [7]).

El concepto dual de dimensión de Hausdorff es la dimensión de empaquetamiento que también tiene una efectivización similar [1].

DEFINICIÓN 2.7. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, la dimensión efectiva fuerte de x, que denotaremos $\mathrm{Dim}(x)$, es

$$\mathrm{Dim}(x) = \limsup_r \frac{\mathrm{K}_r(x)}{r}.$$

DEFINICIÓN 2.8. Dado $E \subseteq \mathbb{R}^n$, la dimensión efectiva fuerte de E, que denotaremos $\mathrm{Dim}(E)$, es

$$\mathrm{Dim}(E) = \sup_{x \in E} \mathrm{Dim}(x).$$

Puede resultar cuanto menos chocante que un concepto basado en propiedades individuales de puntos tenga alguna relación con la dimensión de Hausdorff (o con la de empaquetamiento), que obviamente son siempre nulas para conjuntos contables. Más adelante presentaremos una caracterización completa de las dimensiones de Hausdorff y de empaquetamiento a partir de dimensión efectiva.

Terminamos esta sección introduciendo el concepto de número real aleatorio de Martin-Löf, que también utilizaremos en el teorema de Marstrand.

DEFINICIÓN 2.9. Dado $x \in \mathbb{R}^n$, decimos que x es aleatorio de Martin-Löf si existe una constante $c > 0$ tal que $\mathrm{K}_r(x) > nr - c$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Todo x aleatorio de Martin-Löf tiene dimensión efectiva n, y el conjunto formado por los x aleatorios de Martin-Löf tiene medida de Lebesgue 1.

2.3. ORÁCULOS Y RELATIVIZACIÓN

Un *oráculo* es un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$. Identificamos cada conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ con su secuencia característica $\chi_A \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Una *máquina de Turing M con oráculo* es una máquina de Turing que presenta una cinta adicional llamada *cinta de pregunta*, en la que la máquina escribe una secuencia finita q, que es la pregunta al oráculo A. Cuando la máquina pasa al estado de interrogación se realiza dicha pregunta q, cambiando al estado afirmativo si $q \in A$ y al estado negativo si $q \notin A$.

De esta forma, la máquina de Turing M con cada oráculo A realiza un cálculo distinto, correspondiente al caso en que se proporciona, sin coste alguno, la solución al problema de pertenencia a A y que se denota como M^A. El caso de $A = \emptyset$ corresponde al cálculo tradicional sin oráculo.

Los oráculos son la herramienta más utilizada en calculabilidad para comparar la complejidad de resolución de distintos problemas, utilizándose los términos relativizar y relativización para dicha técnica (ver [25] para una exposición completa).

En el caso de complejidad de Kolmogorov, podemos definir la versión relativizada para cada $A \subseteq \mathbb{N}$, que corresponde a la cantidad de información cuando se proporciona sin coste la solución a la pertenencia a A.

Definición 2.10. Dado $w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, la complejidad de Kolmogorov de w relativa a A es

$$\mathrm{K}^A(w) = \min\left\{|p| \mid U^A(p) = w\right\}.$$

Definición 2.11. Dados $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{N}$, la complejidad de Kolmogorov de x a precisión r relativa a A es

$$\mathrm{K}_r^A(x) = \min\left\{\mathrm{K}^A(q) \mid q \in \mathbb{Q}^n \text{ y } |x-q| \leq 2^{-r}\right\}.$$

De la misma forma podemos definir las dimensiones efectivas relativizadas a un oráculo A.

Definición 2.12. Dado $x \in \mathbb{R}^n$:

- La dimensión efectiva de x relativa a A es
$$\dim^A(x) = \liminf_r \frac{\mathrm{K}_r^A(x)}{r}.$$
- La dimensión efectiva fuerte de x relativa a A es
$$\mathrm{Dim}^A(x) = \limsup_r \frac{\mathrm{K}_r^A(x)}{r}.$$

Y de forma análoga definimos las dimensiones efectivas de un conjunto relativas a un oráculo, $\dim^A(E)$ y $\mathrm{Dim}^A(E)$.

También la aleatoriedad de Martin-Löf se puede relativizar, definiendo que x es *aleatorio de Martin-Löf relativo a un oráculo A* si existe una constante $c > 0$ tal que $\mathrm{K}_r^A(x) > nr - c$ para todo $r \in \mathbb{N}$.

Una observación útil es que se pueden componer un número finito (y hasta contable) de oráculos en uno solo. Por ejemplo, dos oráculos A y B se pueden componer entrelazando los símbolos de sus secuencias características, los de A en las posiciones pares y los de B en las posiciones impares, obteniendo, para cada $w \in \{0,1\}^{<\mathbb{N}}$, $\mathrm{K}^{A,B}(w) \leq \min\{\mathrm{K}^A(w), \mathrm{K}^B(w)\} + O(1)$.

Notemos también que, al añadir nuevos oráculos, la dimensión solo puede disminuir, así que para A, B oráculos cualesquiera, $x \in \mathbb{R}^n$, $\dim^{A,B}(x) \leq \dim^A(x)$.

2.4. El principio punto a conjunto

Los principios de punto a conjunto [11] caracterizan la dimensión de Hausdorff y la dimensión de empaquetamiento en función de las dimensiones efectivas relativizadas. Los enunciamos a continuación utilizando $\dim_{\mathrm{H}}(E)$ para denotar la dimensión de Hausdorff del conjunto E y $\dim_{\mathrm{P}}(E)$ para la dimensión de empaquetamiento de E (en inglés «packing dimension»).

Teorema 2.13 (Lutz y Lutz, 2018). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\dim_{\mathrm{H}}(E) = \min_{B \subseteq \{0,1\}^{<N}} \dim^B(E).$$

Teorema 2.14 (Lutz y Lutz, 2018). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces*

$$\dim_{\mathrm{P}}(E) = \min_{B \subseteq \{0,1\}^{<N}} \mathrm{Dim}^B(E).$$

Ambos teoremas nos permiten utilizar dimensión efectiva, y por tanto técnicas de información algorítmica, para demostrar resultados sobre dimensión fractal. Es interesante notar que existe un oráculo para el cual $\dim^B(E)$ es mínima, no se trata de un ínfimo.

En general, los argumentos sobre complejidad de Kolmogorov relativizan, lo cual quiere decir que se trasladan con facilidad de un oráculo a otro, o directamente no dependen del oráculo utilizado. Si unimos esto al hecho de que la dimensión efectiva se define punto a punto, estamos caracterizado la dimensión de Hausdorff (empaquetado) de un conjunto en función de la dificultad de descripción de los puntos del conjunto.

La potencia de estos teoremas ha sido explorada en los resultados que mencionamos en la sección 4. Aquí nos centraremos en un caso didáctico en el que veremos que la dimensión de la proyección de un conjunto depende únicamente de la cantidad de información de la proyección de cada punto, y en muchos casos interesantes relacionaremos la complejidad de Kolmogorov de un punto y de su proyección.

3. Generalización del teorema de Marstrand

Un problema fundamental en geometría fractal es el estudio de cómo las proyecciones afectan a la dimensión. En el caso de proyecciones ortogonales, para $e \in S^{n-1}$ la proyección de un conjunto $E \subset \mathbb{R}^n$ sobre la línea L_e que pasa por el origen y e es

$$\mathrm{proj}_e\, E = \{e \cdot x \mid x \in E\}.$$

En ese sentido, el teorema de Marstrand [18] y Mattila [19] ya mencionado en la introducción trata el caso de conjuntos analíticos:

Teorema 3.1 (Marstrand 1954, Mattila 1975). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto analítico con* $\dim_{\mathrm{H}}(E) = s$. *Entonces, para casi todo $e \in S^{n-1}$,*

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_e\, E) = \min\{s, 1\}.$$

Asumiendo la hipótesis del continuo, este teorema no es cierto para cualquier E [2]. Recientemente, Lutz y Stull [16] han demostrado que, asumiendo que el conjunto cumpla $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \dim_{\mathrm{P}}(E)$, se puede eliminar el requisito de que el conjunto sea analítico.

Teorema 3.2 (Lutz y Stull, 2018). *Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto con*

$$\dim_{\mathrm{H}}(E) = \dim_{\mathrm{P}}(E) = s.$$

Entonces, para casi todo $e \in S^{n-1}$,

$$\dim_{\mathrm{H}}(\operatorname{proj}_e E) = \text{mín}\{s, 1\}.$$

Uno de los ingredientes de la demostración es el siguiente resultado, que relaciona la dimensión de un punto y de su proyección en algunos casos. Nota: es habitual codificar varios oráculos en uno solo; por ejemplo, A, B se codificará como los elementos de A seguidos de los 0 y los de B seguidos de 1.

Teorema 3.3 (Lutz y Stull, 2018). *Sean A, B oráculos. Sea $e \in S^{n-1}$ aleatorio de Martin-Löf relativo a B. Sean $z \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$ cumpliendo que*

$$\dim^{A,B,e}(z) \geq \operatorname{Dim}^B(z) - \epsilon/2.$$

Sea $\nu < \text{mín}\{\dim^B(z), 1\}$; entonces se cumple que

$$\dim^{A,B,e}(e \cdot z) \geq \nu - \epsilon - 2n\epsilon/(1-\nu).$$

Es decir, si e es suficientemente aleatorio y la dimensión de z es tan alta como su dimensión de empaquetamiento, entonces la proyección de z tiene dimensión tan alta como la dimensión de z.

El teorema 3.3 es básicamente el teorema 4.1 de [16] y su demostración, que no reproduciremos aquí, requiere un delicado estudio de la complejidad de Kolmogorov de las proyecciones de puntos cercanos y una relativización no del todo obvia de los resultados.

A continuación introducimos las ideas principales de la demostración de Lutz y Stull con objeto de ilustrar el uso de dimensión efectiva.

Demostración del teorema 3.2 (ideas principales). Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto con $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \dim_{\mathrm{P}}(E) = s$. Necesitamos demostrar que $\dim_{\mathrm{H}}(\operatorname{proj}_e E) \geq \text{mín}\{s, 1\}$ para casi todo e.

Sea B un oráculo que, a partir de los teoremas 2.13 y 2.14, cumple $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \dim^B(E)$ y $\dim_{\mathrm{P}}(E) = \operatorname{Dim}^B(E)$. Notemos que se pueden componer los oráculos proporcionados por el principio de punto a conjunto para los casos de $\dim_{\mathrm{H}}(E)$ y $\dim_{\mathrm{P}}(E)$.

Sea $e \in S^{n-1}$ cumpliendo que e es aleatorio de Martin-Löf relativo a B, es decir, que existe una constante c tal que $\mathrm{K}_r^B(e) > nr - c$ para todo r. Recordamos que esta condición se cumple para un conjunto de es con medida 1. Este es el conjunto de direcciones para las que vamos a estudiar la dimensión efectiva de las proyecciones.

Sea A tal que $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_e E) = \dim^A(\mathrm{proj}_e E)$. Añadimos el anterior oráculo B y e y seguimos teniendo $\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_e E) = \dim^{A,B,e}(\mathrm{proj}_e E)$. También se cumple $\dim_{\mathrm{H}}(E) = \dim^{A,B,e}(E)$.

Para cada $\epsilon > 0$ elegimos un punto $z_\epsilon \in E$ con dimensión ϵ-cercana a la máxima, es decir, $\dim^{A,B,e}(z_\epsilon) \geq s - \epsilon/2$ para $s = \dim_{\mathrm{H}}(E) = \dim_{\mathrm{P}}(E)$.

Podemos demostrar el teorema si conseguimos una cota inferior suficientemente alta de $\dim(\mathrm{proj}_e z_\epsilon)$. Para ello utilizaremos el anterior teorema 3.3 sobre proyección de puntos.

Notemos que z_ϵ cumple la hipótesis del teorema 3.3, $\dim^{A,B,e}(z_\epsilon) \geq \mathrm{Dim}^B(z_\epsilon) - \epsilon/2$, ya que $\dim_{\mathrm{P}}(E) = \mathrm{Dim}^B(E) \geq \mathrm{Dim}^B(z_\epsilon)$. Por tanto, por el teorema 3.3, para $\nu < \text{mín}\{\dim^B(z_\epsilon), 1\}$,

$$\dim^{A,B,e}(e \cdot z_\epsilon) \geq \nu - \epsilon - 2n\epsilon/(1-\nu).$$

Haciendo que ϵ tienda a cero y que ν se acerque a $\text{mín}\{\dim^B(z_\epsilon), 1\}$ tenemos que

$$\dim_{\mathrm{H}}(\mathrm{proj}_e E) = \sup_{z \in E} \dim^{A,B,e}(e \cdot z) \geq \text{mín}\{s, 1\}. \qquad \square$$

Stull ha mejorado este resultado recientemente en [27] explorando las propiedades de optimalidad de los oráculos utilizados en la demostración anterior y generalizando así todos los resultados conocidos, incluyendo el contraejemplo de Davies [2] para la extensión del teorema de Marstrand a conjuntos no analíticos.

4. Otros resultados

Mencionamos brevemente algunos otros resultados en teoría de la medida geométrica cuya demostración usa el principio del punto a conjunto.

En el espacio euclídeo, N. Lutz [10] ha generalizado a conjuntos arbitrarios los resultados conocidos para conjuntos analíticos o de Borel sobre la dimensión de intersección de productos cartesianos. Lutz y Stull [17] han mejorado las cotas conocidas para la dimensión de conjuntos de Furstenberg generalizados.

Para otros espacios, J. Lutz [9] ha demostrado la existencia de bases de Hamel con cualquier dimensión de Hausdorff. Slaman [24] ha demostrado que el teorema de capacitabilidad para conjuntos analíticos (por el que la dimensión de un conjunto está caracterizada por la de sus subconjuntos compactos) no se cumple para la mayoría de los conjuntos co-analíticos. Por último, para el caso del hiperespacio (el hiperespacio de un conjunto E es el espacio de los subconjuntos compactos de E junto con la métrica de Hausdorff), Lutz, Lutz y Mayordomo [13] han mejorado al caso de conjuntos analíticos los resultados conocidos sobre la dimensión del hiperespacio de un conjunto σ-compacto o autosimilar.

5. Conclusión y direcciones de trabajo

La dimensión efectiva proporciona nuevas herramientas para teoría de la medida geométrica que han demostrado su potencial en los casos mencionados en la sección anterior, además de en el resultado que hemos revisado. En ese sentido, la demostración de Lutz y Stull ha sido estudiada y traducida a términos ajenos a la calculabilidad, no necesariamente más sencillos, en [22].

Un conjunto de Kakeya o Besicovitch en $\mathbb{R}^n$ es un conjunto que contiene un segmento unidad en cada dirección. La conjetura de Kakeya dice que todo conjunto de Kakeya tiene dimensión de Hausdorff n. Dicha conjetura solo está demostrada para el caso $n \leq 2$. En el artículo donde demuestran el principio punto a conjunto [11], Lutz y Lutz dan una demostración alternativa del caso conocido utilizando dicho principio. El estudio de la complejidad de Kolmogorov o cantidad de información inherente en distintas líneas que intersecan un punto de complejidad de Kolmogorov alta es crucial en el caso $\mathbb{R}^2$ y en el estudio de los conjuntos de Furstenberg. Una mejora en estos análisis en $\mathbb{R}^n$ (en particular, en la comprensión de la relación no trivial entre la dimensión efectiva de un punto y la de la línea que lo contiene [26]) supondría la solución de la conjetura para otros casos.

Referencias

[1] K. B. Athreya, J. M. Hitchcock, J. H. Lutz y E. Mayordomo, Effective strong dimension in algorithmic information and computational complexity, *SIAM J. Comput.* **37(3)** (2007), 671–705.

[2] R. Davies, Two counterexamples concerning Hausdorff dimensions of projections, *Colloq. Math.* **42** (1979), 53–58.

[3] R. G. Downey y D. R. Hirschfeldt, *Algorithmic randomness and complexity*, Springer-Verlag, New York, 2010.

[4] K. Falconer, J. Fraser y X. Jin, Sixty years of fractal projections, *Fractal geometry and stochastics V*, 3–25, Progr. Probab. **70**, Birkäuser/Springer, Cham, 2015.

[5] F. Hausdorff, Dimension und äußeres Maß, *Math. Ann.* **79** (1919), 157–179.

[6] M. Li y P. Vitanyi, *An introduction to Kolmogorov complexity and its applications*, Texts in Computer Science, Springer, New York, 2008.

[7] J. H. Lutz, The dimensions of individual strings and sequences, *Inform. and Comput.* **187** (2003), 49–79.

[8] J. H. Lutz, Effective fractal dimensions, *MLQ Math. Log. Q.* **51** (2005), 62–72.

[9] J. H. Lutz, The point-to-set principle, the continuum hypothesis, and the dimensions of Hamel bases, *Computability*, en prensa, 2022.

[10] N. Lutz, Fractal intersections and products via algorithmic dimension, *ACM Trans. Comput. Theory* **13** (2021), Art. 14, 15 pp.

[11] J. H. Lutz y N. Lutz, Algorithmic information, plane Kakeya sets, and conditional dimension, *ACM Trans. Comput. Theory* **10** (2018), Art. 7, 22 pp.

[12] J. Lutz y N. Lutz, Who asked us? How the theory of computing answers questions about analysis, *Complexity and Approximation: In Memory of Ker-I Ko*, 48–56, Lectures Notes in Comput. Sci., 12000, Springer, Cham, 2020.

[13] J. H. LUTZ, N. LUTZ Y E. MAYORDOMO, Extending the reach of the point-to-set principle, *39th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), 2022 (P. Berenbrink y B. Monmege, Eds.)*, **219**, Leibniz Int. Proc. Inform. (LIPIcs), **48**, 1–14, Schloss Dagst uhl. Leibniz-Zent. Inform., 2022.

[14] J. H. LUTZ Y E. MAYORDOMO, Dimensions of points in self-similar fractals, *SIAM J. Comput.* **38** (2008), 1080–1112.

[15] J. H. LUTZ Y E. MAYORDOMO, Algorithmic fractal dimensions in geometric measure theory, *Handbook of Computability and Complexity in Analysis*, 271–302, Theory Appl. Comput., Springer, Cham, 2021.

[16] N. LUTZ Y D. STULL, Projection theorems using effective dimension, *43rd International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science (MFCS) 2018*, Art. No. 71, 15 pp, Leibniz Int. Proc. Inform. (LIPIcs), **117**, Schloss Dagst uhl. Leibniz-Zent. Inform., Wadern, 2018.

[17] N. LUTZ Y D. M. STULL, Bounding the dimension of points on a line, *Inform. and Comput.* **275** (2020), 15 pp.

[18] J. M. MARSTRAND, Some fundamental geometrical properties of plane sets of fractional dimensions, *Proc. London Math. Soc.* **4** (1954), 257–302.

[19] P. MATTILA, Hausdorff dimension, orthogonal projections and intersections with planes, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I Math.* **1** (1975), 227–244.

[20] P. MATTILA, Recent progress on dimensions of projections, *Geometry and analysis of fractals*, 283–301, Springer Proc. Math. Stat., **88**, Springer, Heidelberg, 2014.

[21] E. MAYORDOMO, Effective fractal dimension in algorithmic information theory, *New Computational Paradigms: Changing Conceptions of What is Computable*, 259–285, Springer-Verlag, New York, 2008.

[22] T. ORPONEN, Combinatorial proofs of two theorems of Lutz and Stull, Technical Report, `https://arxiv.org/abs/2002.01743`, 2020.

[23] J. REIMANN, *Computability and Fractal Dimension*, PhD thesis, University of Heidelberg, 2004.

[24] T. SLAMAN, comunicación personal, 2021.

[25] R. I. SOARE, *Turing Computability: Theory and applications*, Theory and Applications of Computability, Springer-Verlag, Berlin, 2016.

[26] D. STULL, The dimension spectrum conjecture for planar lines, Technical Report, `https://arxiv.org/abs/2102.00134`, 2021.

[27] D. STULL, Optimal oracles for point-to-set principles, *39th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science (STACS), 2022 (P. Berenbrink y B. Monmege, Eds.)*, **219**, Leibniz Int. Proc. Inform. (LIPIcs), **57**, 1–17, Schloss Dagst uhl. Leibniz-Zent. Inform., 2022.

ELVIRA MAYORDOMO, DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E INGENIERÍA DE SISTEMAS, INSTITUTO DE INVESTIGACIÓN EN INGENIERÍA DE ARAGÓN, UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA, ZARAGOZA, SPAIN
Correo electrónico: `elvira@unizar.es`