

Problemas no decidibles

Elvira Mayordomo

Modelos abstractos de Cálculo

Zaragoza, noviembre 2007

Los que ya conocemos

- El problema de parada: Dado un programa p y una entrada x , ¿ p con entrada x para?
- Dados dos programas, ¿calculan lo mismo?
- Los que nos da el teorema de Rice:
 - Dado un programa p , ¿ p calcula una función inyectiva?
 - Dado un programa p , ¿ p para con alguna entrada?
 - ...

Algunos parecidos

El “busy beaver”:

- Dado n natural, t natural

¿Es t el tiempo máximo que tardan los programas de longitud n con entrada 0?

Es decir,

$\forall p$ con $|p|=n$, $p(0)\uparrow$ ó $(p(0)\downarrow$ y tarda tiempo $\leq t$)
y existe un q con $|q|=n$ y $q(0)$ tarda tiempo t

Y por supuesto ...

El anti-virus:

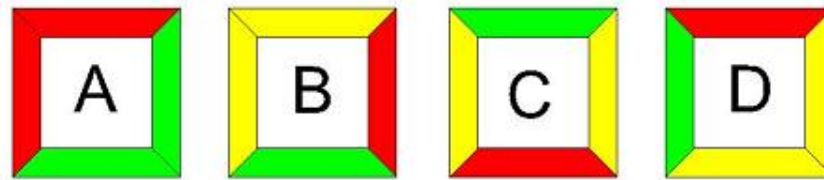
- Dado p un programa y x una entrada
¿Ejecutar p con entrada x “infectará” a este ordenador y/o a otros?

Infectar= causar destrucción de información
y/o que algunas aplicaciones no funcionen
como deben y/o colapsar el ordenador

Wang tiles

- Dado un conjunto finito de baldosas, con un color en cada lado

Ejemplo:

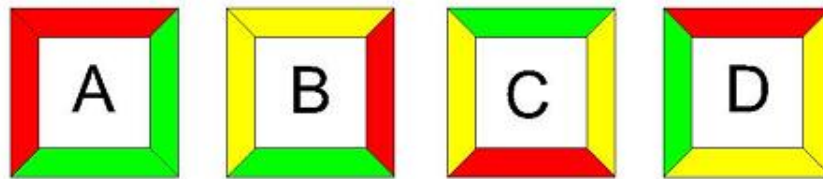


- ¿puede embaldosarse con ellos el plano, de forma que los lados contiguos tengan el mismo color?
(se pueden hacer tantas copias como se quiera, no se pueden girar ni invertir)

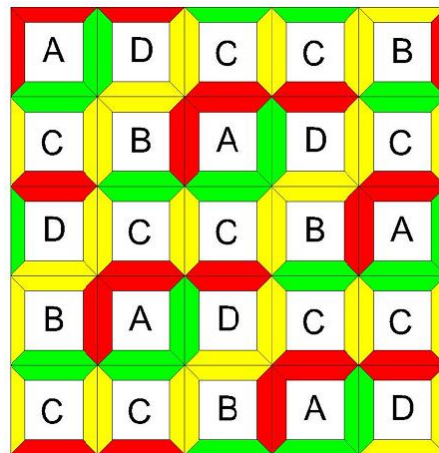
Wang tiles

- Ejemplos fáciles: periódicos

Datos:



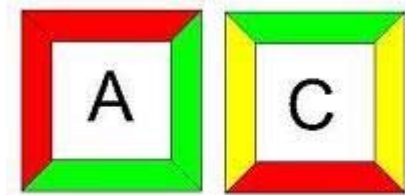
Embaldosado
ampliable:



Wang tiles

- Ejemplos fáciles:

Datos:

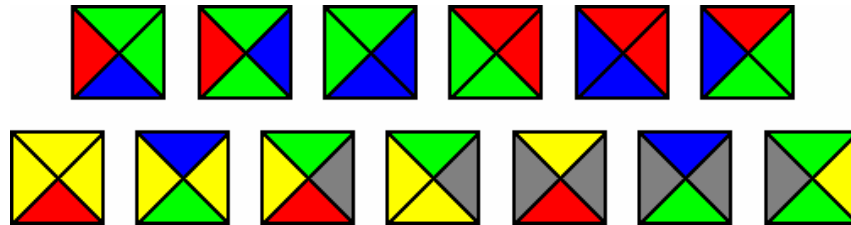


Respuesta: No se puede embaldosar el plano

Wang tiles

- Ejemplos difíciles: aperiódicos

Datos:



Respuesta: Se puede embaldosar el plano de forma no periódica (**Ejercicio: intentarlo**)

- Muy aplicados para construir imágenes y texturas

Wang tiles

- El problema es indecidible: no hay un algoritmo que lo resuelva
- Al principio Wang presentó un algoritmo que lo resuelve pero suponiendo que todos los embaldosados son periódicos (falso)

Problemas indecidibles famosos

El problema de correspondencia de Post

- Dadas dos listas de palabras x_1, x_2, \dots, x_k
 y_1, y_2, \dots, y_k
¿existen a_1, a_2, \dots, a_n para los cuales
 $x_{a_1}x_{a_2}\dots x_{a_n} = y_{a_1}y_{a_2}\dots y_{a_n}$?

El problema de Post

Ejemplo: $u_1=aba$ $u_2=bbb$ $u_3=aab$ $u_4=bb$,
 $v_1=a$ $v_2=aaa$ $v_3=abab$ $v_4=babba$

Datos:

aba	bbb	aab	bb
a	aaa	abab	babba

aba	bb	aab	aba
a	babba	abab	a

El problema de Post

Ejemplo:

Datos:

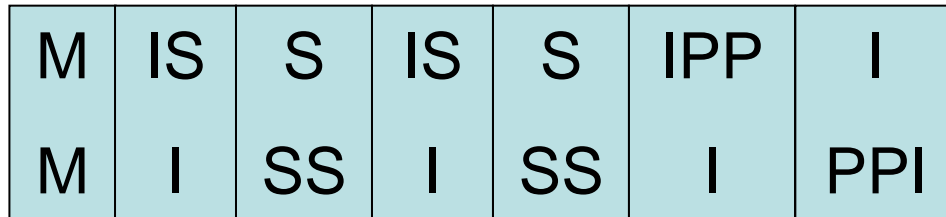
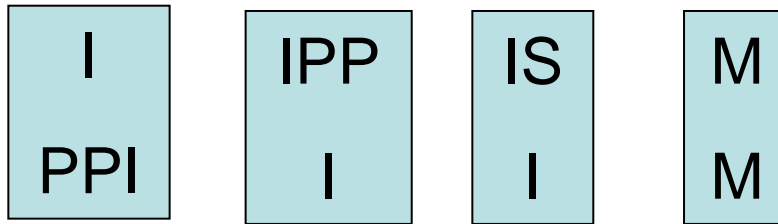
abb	bb	abb
a	aaa	abab

Respuesta: No

El problema de Post

Ejemplo:

Datos:



Problemas indecidibles famosos

El décimo problema de Hilbert

- Dada una ecuación con coeficientes enteros, ¿existe una solución entera?
- Ejemplos: $x^2+y^2=13$
 $2x-11=0$