Capítulo 8: Tiempo polinómico versus tiempo exponencial.

P y EXP

- P y EXP son **conjuntos de problemas decisionales** (es decir, dos respuestas posibles).

- **EXP** contiene casi todos los problemas que intentaréis resolver con un algoritmo.

- **P** es una parte de EXP: los problemas que se pueden resolver eficientemente o **resolubles en la práctica**.

Definiciones.

- Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{O}(f) = \{h : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid \exists c > 0 \text{ tal que } h(m) \leq c \cdot f(m)\ \ \forall m\}$$

(O(f) es el conjunto de funciones acotadas por $c \cdot f$, para alguna constante c).

- Dada una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\mathrm{DTIME}(f) = \{\, \Pi \mid \quad \Pi \text{ es un problema decisional y existe un algoritmo } q \text{ que lo resuelve y cumple } \mathrm{t}_q(x) = \mathrm{O}(f(|x|))\,\}.$$

Definiciones.

- P es el conjunto de problemas resolubles en tiempo polinómico:

$$\mathrm{P} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(|x|^k)$$

- EXP es el conjunto de problemas resolubles en tiempo exponencial:

$$\mathrm{EXP} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(2^{|x|^k})$$

ATENCIóN

- Los tiempos (DTIME($2^{|x|^k}$), DTIME($|x|^k$)) son cotas *superiores*.

- P $\subseteq$ EXP

- Se sabe que P $\neq$ EXP (luego P $\subset$ EXP).

Problemas resolubles en la práctica.

- P es el conjunto de problemas resolubles en la práctica.

- Si Π no está en P se considera no resoluble de forma eficiente.

- La mayoría de los algoritmos q que se implementan cumplen $\mathrm{t}_q(x) = \mathrm{O}(|x|^k)$ para algún k.

Razones para considerar P “lo resoluble eficientemente”:

1. Los problemas naturales que se sabe que están en P tienen algoritmos “rápidos” (que cumplen $\mathrm{t}_q(x) \leq c \cdot |x|^k$ para $k \leq 3$ y c pequeña).

2. Los problemas naturales para los que no se conocen algoritmos polinómicos, tampoco tienen algoritmos conocidos con tiempo por debajo de una exponencial $2^{c|x|}$.

3. **Pero ...** hay unos pocos problemas con algoritmos exponenciales en caso peor que funcionan rápido en la práctica: Mochila.

$$\max_{|x|=m} \mathrm{t}_q(x) \text{ es exponencial}$$

Considerando la velocidad de un pentium 4 (cada instrucción tarda alrededor de 1,5 $\times 10^{-9}$ segundos, suponiendo una velocidad de 2,4 GHz y 4 ciclos por instrucción) veamos en la siguiente tabla cuánto valen las funciones de tiempo $|x|, |x|^2, |x|^3, |x|^5$, $2^{|x|}$ y $3^{|x|}$ para distintos valores de $|x|$.

$\lvert x\rvert =$	10	20	30	40	50	60
$\lvert x\rvert$	$1{,}5\times10^{-8}$ seg.	3×10^{-8} seg.	$4{,}5\times10^{-8}$ seg.	6×10^{-8} seg.	$7{,}5\times10^{-8}$ seg.	9×10^{-8} seg.
$\lvert x\rvert^2$	$1{,}5\times10^{-7}$ seg.	6×10^{-7} seg.	$1{,}35\times10^{-6}$ seg.	$2{,}4\times10^{-6}$ seg.	$3{,}75\times10^{-6}$ seg.	$5{,}4\times10^{-6}$ seg.
$\lvert x\rvert^3$	$1{,}5\times10^{-6}$ seg.	$1{,}2\times10^{-5}$ seg.	4×10^{-5} seg.	$9{,}6\times10^{-5}$ seg.	$1{,}9\times10^{-4}$ seg.	$3{,}2\times10^{-4}$ seg.
$\lvert x\rvert^5$	$1{,}5\times10^{-4}$ seg.	0,0048 seg.	0,036 seg.	0,15 seg.	0,47 seg.	1,17 seg.
$2^{\lvert x\rvert}$	$1{,}5\times10^{-6}$ seg.	0,0015 seg.	1,611 seg.	27,6 minutos	19 días	59,4 años
$3^{\lvert x\rvert}$	$8{,}8\times10^{-5}$ seg.	5,2 seg.	3 días	5,8 siglos	3×10^{5} siglos	2×10^{10} siglos

A continuación vemos el mayor tamaño de entrada resoluble en una hora:

tiempo	computador de hoy	100 veces más rápido	1000 veces más rápido
$\|x\|$	$N_1 = 24 \cdot 10^{11}$	$100N_1$	$1000N_1$
$\|x\|^2$	$N_2 = 1550000$	$10N_2$	$31{,}6N_2$
$\|x\|^3$	$N_3 = 13200$	$4{,}64N_3$	$10N_3$
$\|x\|^5$	$N_4 = 300$	$2{,}5N_4$	$3{,}98N_4$
$2^{\|x\|}$	$N_5 = 41,1$	N_5+6,64	N_5+9,97
$3^{\|x\|}$	$N_6 = 25,9$	N_6+4,19	N_6+6,29

Esta tabla presenta el efecto de la mejora tecnológica el varios algoritmos de tiempo polinómico y exponencial.

Tesis extendida de Turing-Church.

- Hemos visto distintos modelos de cálculo, equivalentes respecto a las definiciones de *calculable* y *decidible*.

- ¿Qué pasa con las definiciones de P y EXP?

Tesis extendida de Turing-Church: Máquinas de Turing.

- Cada máquina M calcula una función a base de acciones elementales (moverse una casilla, cambiar de estado, escribir un símbolo).

  $\mathbf{t}_M(x) =$ Número de pasos de M con entrada x desde que empieza hasta que se para.

$$\mathrm{DTIME}_1(f) = \{\, \Pi \mid \begin{array}{l} \Pi \text{ es un problema decisional} \\ \text{y existe una máquina } M \text{ que lo} \\ \text{resuelve y cumple } \mathrm{t}_M(x) = \mathrm{O}(f(|x|)) \,\}. \end{array}$$

Tesis extendida de Turing-Church: Máquinas de Turing.

Lema Para cada f:

$$\begin{aligned} \mathsf{DTIME}_1(f(|x|)) &\subseteq \mathsf{DTIME}(f^3(|x|)) \\ \mathsf{DTIME}(f(|x|)) &\subseteq \mathsf{DTIME}_1(f^3(|x|)) \end{aligned}$$

Corolario

$$\begin{aligned} \mathsf{P} &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{DTIME}_1(|x|^k) \\ \mathsf{EXP} &= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \mathsf{DTIME}_1(2^{|x|^k}) \end{aligned}$$

Tesis extendida de Turing-Church.

- Para cada uno de los modelos conocidos con una definición natural de paso, P y EXP corresponden a tiempo polinómico y exponencial respectivamente.

- **Tesis extendida de Turing-Church:** Cualquier modelo <u>razonable y secuencial</u> de cálculo da la misma definición de P y EXP.

Tesis extendida de Turing-Church: PERO ...

- La conjetura anterior está siendo replanteada a la luz de los recientes estudios sobre **el computador cuántico**.

- Este modelo, formulado en 1982 por Deutsch y Lloyd es de naturaleza muy distinta a los otros secuenciales.

- En 1994, Nishino resolvió con este modelo en tiempo polinómico problemas para los que no se conocen algoritmos polinómicos.

- Hasta el momento no se ha construído ningún computador cuántico.