

```
espec booleanos
  género bool
  operaciones
    verdad:  $\rightarrow$  bool
    falso:  $\rightarrow$  bool
     $\neg$ _: bool  $\rightarrow$  bool
     $\neg$ ^_,  $\neg$ ∨_: bool bool  $\rightarrow$  bool
  ecuaciones b: bool
     $\neg$ verdad = falso
     $\neg$ falso = verdad
    verdad  $\vee$  falso = verdad
    b  $\vee$  verdad = verdad
    b  $\vee$  falso = b
    b  $\wedge$  verdad = b
    b  $\wedge$  falso = falso
fespec
```

```
espec zeta3
género zeta3
operaciones
  cero: → zeta3
  suc: zeta3 → zeta3
  +_, *_: zeta3 zeta3 → zeta3
ecuaciones a,b: zeta3
  suc(suc(suc(a))) = a
  a+0 = a
  a+suc(b) = suc(a+b)
  a*0 = 0
  a*suc(b) = a*b+a
fespec
```

```
espec naturales1
usa booleanos
género nat
operaciones
  0: → nat
  suc: nat → nat
  +_,_*_: nat nat → nat
  _<=_: nat nat → bool
ecuaciones a,b: nat
  a+0 = a
  a+suc(b) = suc(a+b)
  a*0 = 0
  a*suc(b) = (a*b)+a
  0<=a = verdad
  suc(a)<=0 = falso
  suc(a)<=suc(b) = a<=b
fespec
```

```

espec enteros
usa booleanos
género ent
operaciones
  0: → ent
  suc: ent → ent
  pred: ent → ent
  +, -, *: ent ent → ent
  ≤, ≥: ent ent → bool
ecuaciones a, b: ent
  suc(pred(a)) = a
  pred(suc(a)) = a
  a+0 = a
  a+suc(b) = suc(a+b)
  a+pred(b) = pred(a+b)
  a-0 = 0
  a-suc(b) = pred(a-b)
  a-pred(b) = suc(a-b)
  a*0 = 0
  a*suc(b) = (a*b)+a
  a*pred(b) = (a*b)-a
  pred(a)≤b = a≤suc(b)
  suc(a)≤b = a≤pred(b)
  0≤pred(0) = falso
  a≠0 → 0≤pred(a) = 0≤a
  a≠pred(0) → 0≤suc(a) = 0≤a
  0≤0 = verdad
  a>b = ¬(a≤b)
fespec

```

```

espec naturales
  usa booleanos
  género nat
  operaciones
    0:  $\rightarrow$  nat
    suc: nat  $\rightarrow$  nat
    parcial pred: nat  $\rightarrow$  nat
     $_{+},_{*}$ : nat nat  $\rightarrow$  nat
     $_{\leq},_{>}$ : nat nat  $\rightarrow$  bool
    parcial  $_{-}$ : nat nat  $\rightarrow$  nat
  dominio de definicion a,b:nat
    pred(suc(a))
     $b \leq a \rightarrow a - b$ 
  ecuaciones a,b:nat
     $a + 0 = a$ 
     $a + \text{suc}(b) = \text{suc}(a + b)$ 
     $a * 0 = 0$ 
     $a * \text{suc}(b) = (a * b) + a$ 
     $0 \leq a = \text{verdad}$ 
     $\text{suc}(a) \leq 0 = \text{falso}$ 
     $\text{suc}(a) \leq \text{suc}(b) = a \leq b$ 
     $a > b = \neg(a \leq b)$ 
     $a - 0 = a$ 
     $a - \text{suc}(b) = \text{pred}(a - b)$ 
fespec

```

espec conjuntos
usa booleanos, naturales
parámetro formal
género elemento
fpf
género conjunto
operaciones
 vacío: $\rightarrow$ conjunto
 esvacío: conjunto $\rightarrow$ bool
 añadir: elemento conjunto $\rightarrow$ conjunto
 quitar: elemento conjunto $\rightarrow$ conjunto
 pertenece: elemento conjunto $\rightarrow$ bool
 $\cup$, $\cap$: conjunto conjunto $\rightarrow$ conjunto
 cardinal: conjunto $\rightarrow$ nat
ecuaciones A,B: conjunto; e,f: elemento
 añadir(e, añadir(f,A)) = añadir(f, añadir(e,A))
 añadir(e, añadir(e,A)) = añadir(e,A)
 esvacío(vacío) = verdad
 esvacío(añadir(e,A)) = falso
 quitar(e, vacío) = vacío
 quitar(e, añadir(e,A)) = quitar(e,A)
 $e \neq f \rightarrow$ quitar(e, añadir(f,A)) = añadir(f, quitar(e,A))
 pertenece(e, vacío) = falso
 pertenece(e, añadir(f,A)) = $(e=f) \vee$ (pertenece(e,A))
 $A \cup$ vacío = A
 $A \cup$ añadir(e,B) = añadir(e, $A \cup$ B)
 $A \cap$ vacío = vacío
 $A \cap$ añadir(e,B) = $(A \cap$ añadir(e,vacío)) $\cup$ (A $\cap$ B)
 cardinal(vacío) = 0
 cardinal(añadir(e,A)) = suc(cardinal(quitar(e,A)))
fespec

```

espec multiconjuntos
  usa booleanos, naturales
  parámetro formal
    género elemento
  fpf
  género mconjunto
  operaciones
    vacío:  $\rightarrow$  mconjunto
    esvacío: mconjunto  $\rightarrow$  bool
    poner: elemento mconjunto  $\rightarrow$  mconjunto
    quitar: elemento mconjunto  $\rightarrow$  mconjunto
    pertenece: elemento mconjunto  $\rightarrow$  bool
    frecuencia: elemento mconjunto  $\rightarrow$  nat
    unión: mconjunto mconjunto  $\rightarrow$  mconjunto
    cardinal: mconjunto  $\rightarrow$  nat
  ecuaciones A,B:mconjunto; e,f: elemento
    poner(e, poner(f,A)) = poner(f, poner(e,A))
    esvacío(vacío) = verdad
    esvacío(poner(e,A)) = falso
    quitar(e, vacío) = vacío
    quitar(e, poner(e,A)) = A
     $e \neq f \rightarrow$  quitar(e, poner(f,A)) = poner(f, quitar(e,A))
    pertenece(e, vacío) = falso
    pertenece(e, poner(f,A)) =  $(e=f) \vee (\text{pertenece}(e,A))$ 
    frecuencia(e, vacío) = 0
    frecuencia(e, poner(e,A)) = frecuencia(e,A)+1
     $e \neq f \rightarrow$  frecuencia(e, poner(f,A)) = frecuencia(e,A)
    unión(A, vacío) = A
    unión(A, poner(e,B)) = poner(e, unión(A,B))
    cardinal(vacío) = 0
    cardinal(poner(e,A)) = suc(cardinal(A))
fespec

```

```

espec secuencias
  usa booleanos, naturales
  parámetro formal
    género elemento
  fpf
    género sec
  operaciones
    vacía:  $\rightarrow$  sec
    esvacía: sec  $\rightarrow$  bool
    poner: elemento sec  $\rightarrow$  sec
    está: elemento sec  $\rightarrow$  bool
    frecuencia: elemento sec  $\rightarrow$  nat
    concatenar: sec sec  $\rightarrow$  sec
    longitud: sec  $\rightarrow$  nat
ecuaciones A,B: sec; e,f: elemento
  esvacía(vacía) = verdad
  esvacía(poner(e,A)) = falso
  está(e,vacía) = falso
  está(e,poner(f,A)) =  $(e=f) \vee (\text{está}(e,A))$ 
  frecuencia(e,vacía) = 0
  frecuencia(e,poner(e,A)) = frecuencia(e,A)+1
   $e \neq f \rightarrow$  frecuencia(e,poner(f,A)) = frecuencia(e,A)
  concatenar(vacía,B) = B
  concatenar(poner(e,A),B) = poner(e,concatenar(A,B))
  longitud(vacía) = 0
  longitud(poner(e,A)) = suc(longitud(A))
fespec

```

```

espec polinomios
  usa enteros,naturales
  género polinomio
  operaciones
    cero: → polinomio
    añade: polinomio ent nat → polinomio
    suma, _-_, _*_ : polinomio polinomio → polinomio
    evalúa: polinomio entero → entero
  ecuaciones a,b: ent; n,m: nat; p,q: polinomio
    añade(añade(p,a,n),b,n) = añade(p,a+b,n)
    añade(añade(p,a,n),b,m) = añade(añade(p,b,m),a,n)
    suma(p,cero) = p
    suma(p,añade(q,a,n)) = añade(suma(p,q),a,n)
    p-cero = p
    p-añade(q,a,n) = añade(p-q,0-a,n)
    evalúa(cero,b) = 0
    n>0 → evalúa(añade(p,a,n),b) =
      evalúa(p,b)+evalúa(añade(cero,a,n-1),b)*b
    evalúa(añade(p,a,0),b) = evalúa(p,b)+a
    p*cero = cero
    p*añade(q,a,n) = suma(p*q,p*añade(cero,a,n))
fespec

```