Problemas sobre decidibles y semidecidibles

Elvira Mayordomo, Universidad de Zaragoza

12 de diciembre de 2014

1. Recordatorio de la definición de decidible y semidecidible

Definición 1.1 Un lenguaje L es semidecidible si existe un programa p que acepta L, es decir:

- si $w \in L$ entonces p con entrada w para y devuelve acepta,
- si $w \notin L$ entonces p con entrada w no para o no devuelve acepta.

Definición 1.2 Un lenguaje L es decidible si existe un programa p que para siempre y acepta L, es decir:

- si $w \in L$ entonces p con entrada w para y devuelve acepta,
- si $w \notin L$ entonces p con entrada w para y no devuelve acepta.

Contamos con el siguiente programa Simula que simula un programa p con entrada w durante T pasos (como hacen los intérpretes o los debuggers):

```
Procedimiento Simula (ent p:cadena; ent w:cadena; ent T:natural;
sal ha_parado:booleano; sal resultado:cadena)
{Simula T pasos de la ejecución de p con entrada w}
{ha_parado=True cuando ha parado en tiempo<=T}
{resultado=resultado de p con entrada w si ha parado}
```

2. Problemas

1. Demostrar que el siguiente lenguaje es semidecidible.

$$A = \{\, p\#x \quad | \quad \begin{array}{l} p \text{ es un programa y } x \text{ es una cadena} \\ \text{que cumplen que } p \text{ con entrada } x \text{ para en tiempo impar}\} \end{array}$$

2. Demostrar que el siguiente lenguaje es semidecidible.

$$A = \{\, p\#x \quad | \quad \begin{array}{l} p \text{ es un programa y } x \text{ es una cadena} \\ \text{que cumplen que } p \text{ con entrada } x \text{ para} \\ \text{y devuelve como resultado un número múltiplo de } 3\} \end{array}$$

3. Demostrar que si A y B son decidibles entonces $A \cap B$ es decidible.

4. Demostrar que si A y B son semidecidibles entonces $A \cup B$ es semidecidible.

5. Demostrar que si A y B son semidecidibles entonces $A \cap B$ es semidecidible.

6. Para cada una de las afirmaciones siguientes responda si es verdadera o falsa y presente argumentos que avalen su elección.

1. Todo lenguaje regular es decidible.
2. Todo lenguaje decidible es independiente de contexto.
3. Todo lenguaje reconocible mediante un autómata de estados finitos determinista (AFD) con n estados es reconocible por algún autómata de estados finitos no determinista (AFnD) con n estados.
4. Todo lenguaje reconocible mediante un autómata de estados finitos no determinista (AFnD) con n estados es reconocible por algún autómata de estados finitos determinista (AFD) con n estados.

7.
1. Dar un ejemplo de un lenguaje semidecidible que no sea decidible.
2. Dar un ejemplo de un lenguaje decidible que no sea independiente de contexto. Demostrar que dicho ejemplo es un lenguaje decidible.
3. Dar un ejemplo de un lenguaje independiente de contexto que no sea regular. Demostrar que dicho ejemplo es un lenguaje independiente de contexto.

8. Para cada una de las siguientes afirmaciones, decir si es cierta o falsa justificando la respuesta

1. El complementario de un lenguaje semidecidible es semidecidible.
2. El complementario de un lenguaje decidible es decidible.
3. El complementario de un lenguaje regular es regular.
4. El complementario de un lenguaje independiente de contexto es independiente de contexto.

9. (Nota: lenguaje recursivo y lenguaje decidible son sinónimos). Dado un alfabeto Σ, un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$ y una palabra $x \in \Sigma^*$, se define el lenguaje $P_x(L) = \{y \in \Sigma^* \mid xy \in L\}$.

a) Si L es un lenguaje recursivo o decidible, determinar si $P_x(L)$ es un lenguaje decidible o recursivo para cada $x \in \Sigma^*$.

b) Si para cada $x \in \Sigma^*$ $\;P_x(L)$ es un lenguaje recursivo o decidible, determinar si L es un lenguaje decidible o recursivo .

10.
1. Describa razonadamente un contraejemplo para cada una de estas afirmaciones:

a) Si L es un lenguaje semidecidible, entonces todo lenguaje $A \subseteq L$ también es semidecidible.

b) La intersección de un lenguaje semidecible pero no decidible, con otro lenguaje decidible es un lenguaje decidible.

2. Demuestre que el lenguaje

$$L = \{p, q, x \mid \text{los programas } p \text{ y } q \text{ con entrada } x \text{ devuelven el mismo valor}\}$$

es semidecidible.

11. Determinar si es decidible (por ejemplo, construyendo un algoritmo de decisión) determinar si un lenguaje regular L cualquiera tiene una o más palabras en común con el lenguaje descrito mediante la expresión

$$(00 + 11 + (01 + 10)(00 + 11)^*(01 + 10))^*.$$

12.
1. Demostrar que si A y B son decidibles entonces $A \cup B$ es decidible.
2. Demostrar que si $A \subseteq \Sigma^*$ es un lenguaje decidible y $w \in \Sigma^*$ entonces $A_w = \{u \mid wu \in A\}$ es decidible.
3. Dar un ejemplo de un lenguaje semidecidible que no sea decidible.