Máquinas de Turing, recordatorio y problemas

Elvira Mayordomo, Universidad de Zaragoza

5 de diciembre de 2014

1. Recordatorio de la definición de máquina de Turing

Una máquina de Turing, abreviadamente TM, es intuitivamente un autómata finito con una cinta de entrada sólo de lectura y una cinta de memoria adicional de lectura y escritura. Cada cinta está dividida en celdas, la máquina accede a la información de la cinta a través de una cabeza lectora/escritora que puede leer/escribir sobre una única celda cada vez. Cada cabeza se puede mover a derecha o izquierda, pero sólo una posición cada vez.

Una transición de una máquina de Turing depende del estado en que está la máquina y del contenido de las dos cabezas lectoras, según estos se realizarán las siguientes tres acciones:

- cambio de estado,
- escritura en la celda de la memoria sobre la que está la cabeza,
- movimiento de las dos cabezas.

Admitiremos tres tipos de movimientos para cada cabeza: celda a la derecha, celda a la izquierda y no moverse.

La definición formal de una máquina de Turing es:

Definición 1.1 Una *máquina de Turing* es una estructura $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, donde

- Q es un conjunto finito de estados,
- Σ es un alfabeto, el alfabeto de entrada,
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\$, \diamondsuit\}$ es el alfabeto de cinta ($\$, \diamondsuit \notin \Sigma$),
- $\delta : Q \times \Gamma \times \Gamma \to Q \times \{\mathrm{I}, \mathrm{D}, \mathrm{N}\} \times \Gamma \times \{\mathrm{I}, \mathrm{D}, \mathrm{N}\}$ es la función de transición,
- q_0 es el estado inicial ($q_0 \in Q$),
- F es el conjunto de estados finales ($F \subseteq Q$).

La función de transición, dado el estado actual, el símbolo que lee la cabeza de la entrada y el símbolo que lee la cabeza de la memoria, especifica el nuevo estado, el movimiento en la cinta de entrada, el nuevo símbolo a escribir en la cinta de memoria y el movimiento de la cabeza en la cinta de memoria.

Inicialmente la máquina se encuentra en el estado q_0, y la posición más a la izquierda de la cinta de entrada contiene un carácter especial \$. A partir de esta posición la cinta de entrada contiene la cadena de entrada $w \in \Sigma^*$. El resto de la cinta contiene en todas las celdas un carácter especial denominado *blanco*, al que representaremos con el signo $\diamondsuit$. La cabeza lectora está inicialmente en la segunda celda, es decir, sobre el primer carácter de la cadena de entrada. La cinta de memoria contiene inicialmente el carácter \$ en la primera posición seguido de $\diamondsuit$ en el resto. La cabeza lectora/escritora está sobre la segunda celda, es decir el primer $\diamondsuit$.

La máquina ejecuta transiciones mientras pueda aplicar la función de transición. Si en algún momento la máquina se encuentra en un estado q con carácteres a, b en las cabezas y no hay transición definida para el par (q, a, b), entonces la máquina para.

Decimos que una máquina M acepta una palabra w cuando si inicialmente w está en la cinta de entrada como se describe anteriormente la máquina en algún momento para encontrándose en un estado final.

Definición 1.2 El lenguaje aceptado por una máquina de Turing M es

$$L(M) = \{w : \text{con entrada } w \text{ la máquina } M \text{ para en un estado final}\}.$$

2. Problemas

1. Diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje

$$\{a^n b^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

2. Diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje

$$\{a^n b^n c^n : n \in \mathbb{N}\}.$$

3. Diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje

$$\{v : v \in \Sigma^*, |v| \text{ es par}\}.$$

4. Diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje

$$\{vv : v \in \Sigma^*\}.$$

5. Diseñar una Máquina de Turing que acepte el lenguaje $\left\{0^{2n}1^n0^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

6. Definir una máquina de Turing que no pare con alguna entrada. Definir una máquina de Turing que no pare con ninguna entrada.

7. Razonar porqué para cada AdP (autómata de pila) existe una maquina de Turing que hace exactamente lo mismo.

3. Problemas de temas anteriores

8. Responda si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas, dando una justificación de su respuesta breve y rigurosa.

1. Si $\bar{A}$ es finito, el lenguaje A es necesariamente regular.
2. Para cualquier lenguaje A independiente de contexto, existe un número infinito de gramáticas diferentes G tales que $L(G) = A$.
3. Si A es un lenguaje independiente de contexto y B es un lenguaje regular, entonces $B \setminus A$ es un lenguaje independiente de contexto.
4. El lenguaje $A = \{1^n 1^m 0^n 0^m \mid n, m \geq 0\}$ no es un lenguaje independiente de contexto.
5. El lenguaje

   $$F = \{w \in \{a, b, c\}^* \mid |w|_a < |w|_b \text{ ó } |w|_a < |w|_c, \text{ pero no ambas cosas a la vez}\}$$

   es un lenguaje independiente de contexto.

9. Responda si son Ciertas o Falsas las siguientes afirmaciones y justifique brevemente, aunque formalmente, su respuesta:

1. Todo subconjunto de un lenguaje regular es un lenguaje regular.
2. Si L es un lenguaje regular, entonces también es regular $\{w|w \in L \wedge w^R \notin L\}$.
3. El lenguaje $\{w \in \{a,b\}^*|w = w^R\}$ es regular.
4. La intersección de un lenguaje independiente contexto y un lenguaje finito da como resultado un lenguaje independiente de contexto.
5. El conjunto de los lenguajes regulares es contable.

10. Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Considere el lenguaje,

$$L = \left\{a^i b^j c^k d^r \mid i + j = k + r\right\}$$

1. Diseñar una Gramática Independiente de Contexto que genere el lenguaje L.
2. Diseñar un Autómata de Pila que reconozca el lenguaje L.

11. Dado el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c\}$ y el lenguaje

$$L = \{ax_1ax_2 \dots ax_nby_1by_2 \dots by_n \mid x_i, y_i \in \Sigma, i = 1, \dots, n\},$$

se pide

a) Demostrar que el lenguaje L es un lenguaje independiente de contexto.

b) Construir una gramática independiente de contexto en forma normal de Chomsky que genere el lenguaje L.

c) Determinar razonadamente si L es un lenguaje regular o no.

12. Dado el lenguaje $A = \{w0^n \mid w \in \{0,1\}^*;\ |w| = n;\ n \geq 1\}$, se puede verificar que la palabra $u = 01100000 \in A$ ($u = 01100^4$, i. e., $|w| = |0110| = 4$ y $u = w0^4$), pero $v = 110 \notin A$. Se pide,

1. Demostrar que A no es regular.
2. Demostrar que el lenguaje A es un lenguaje independiente de contexto.
3. Construir una gramática independiente de contexto en forma normal de Chomsky que genere el lenguaje A.
4. Construir un autómata de pila que acepte el lenguaje A.
5. ¿Qué cambiaría en sus respuestas anteriores si el lenguaje a considerar no tuviera la restricción $|w| = n$, es decir, el lenguaje que se hubiera dado en el enunciado fuese $A = \{w0^n \mid w \in \{0,1\}^*;\quad n \geq 1\}$?

13. Sea el lenguaje $L = \{w|w \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w|_b - 1\}$.

1. Demostrar que L no es regular.

2. Escribir una gramática independiente de contexto que genere L.
3. Escribir una gramática independiente de contexto en forma normal de Chomsky que genere L.
4. Escribir un autómata de pila que reconozca L.

14. 1. Construir una gramática independiente de contexto en forma normal de Chomsky para el lenguaje:

$$L = \left\{ a^n c b^m a c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

2. Determinar si el siguiente lenguaje es regular, independiente de contexto pero no regular, o no independiente de contexto

$$L = \left\{ a^{2n} c b^m a c^{n+3m} \mid n, m \in \mathbb{N} \right\}.$$

15. Demuestre que el lenguaje

$$L = \left\{ a^i b^j c^k \mid i > j > k \geq 0 \right\}$$

no es un lenguaje regular.

16. Dado $L = \left\{ a^k b^r a^m \mid m = k + r \right\}$.

1. Utilizando las propiedades de clausura de los lenguajes regulares demostrar que L no es un lenguaje regular.
2. Diseñar una Gramática Independiente de Contexto que genere el lenguaje L.
3. Diseñar un Autómata de Pila que reconozca el lenguaje L.

17. Demuestre que el lenguaje

$$L = \left\{ 0^i 1^j \mid i > 0, j > 0, i \text{ y } j \text{ son primos entre sí} \right\}$$

no es regular. (Nota: dos números son primos entre si, si el máximo común divisor de los dos números es igual a 1). Palabras que pertenecen a este lenguaje son: $0^{10}1^{11}$, $0^{10}1^{3}$. Palabras que no pertenecen a este lenguaje son: $0^{10}1^{10}$, $0^{7}1^{21}$. (Pista: para cada primo p, $w = 0^p 1^{(p-1)!} \in L$.)