Álvarez Aldea, Alberto (NIP: 681687)

Ejercicios 5 de Diciembre de 2014

1) Diseñar una máquina de turing que acepte el lenguaje $\{a^n b^n / n \in N\}$

A continuación se muestra el diseño de la máquina de turing M.

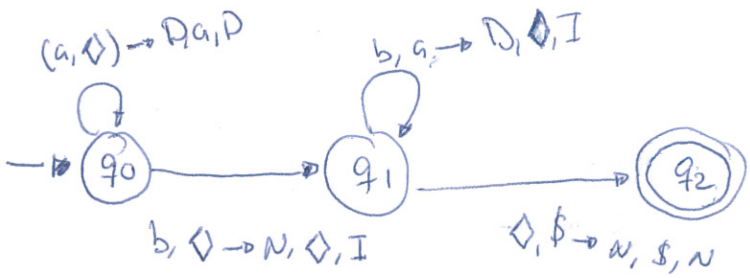
$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ dado por

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \$, \Diamond\}$ $F = q_2$

y con las siguientes funciones de transición:

$\delta(q_0, a, \Diamond) = (q_0, D, a, D)$
$\delta(q_0, b, \Diamond) = (q_1, N, \Diamond, I)$
$\delta(q_1, b, a) = (q_1, D, \Diamond, I)$
$\delta(q_1, \Diamond, \$) = (q_2, N, \$, N)$

A continuación se muestra el autómata de la máquina de turing M.



(2) Diseñar una maquina de turing que acepte el lenguaje $\{a^n b^n c^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

A continuación se muestra el diseño de la maquina de turing M.

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ dado por

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b, c\}$ $\Gamma = \{a, b, c, \diamond, \$\}$, $F = q_3$ y

con las siguientes funciones de transición:

$\delta(q_0, a, \diamond) = (q_0, D, a, D)$

$\delta(q_0, b, \diamond) = (q_1, N, \diamond, I)$

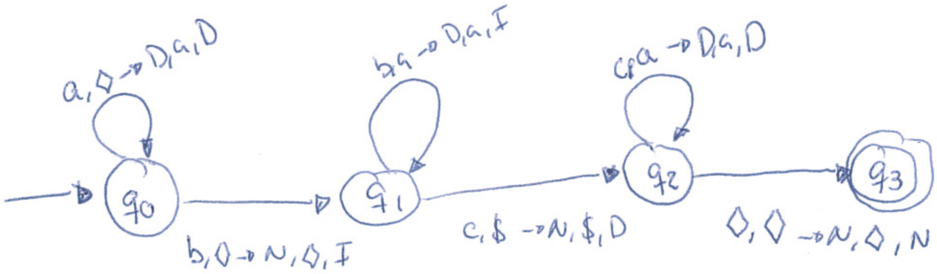
$\delta(q_1, b, a) = (q_1, D, a, I)$

$\delta(q_1, c, \$) = (q_2, N, \$, D)$

$\delta(q_2, c, a) = (q_2, D, a, D)$

$\delta(q_2, \diamond, \diamond) = (q_3, N, \diamond, N)$

A continuación se muestra el autómata de la máquina de turing M.



③ Diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje $\{V / V \in \Sigma^*, |V| \text{ es par}\}$

V

A continuación se muestra el diseño de la máquina de Turing M.

$M = (Q, \Sigma, T, \delta, q_0, F)$ dado por

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ $\Sigma = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ $T = \Sigma \cup \{\diamond, \$\}$ $F = q_2$.

y las siguientes funciones de transición:

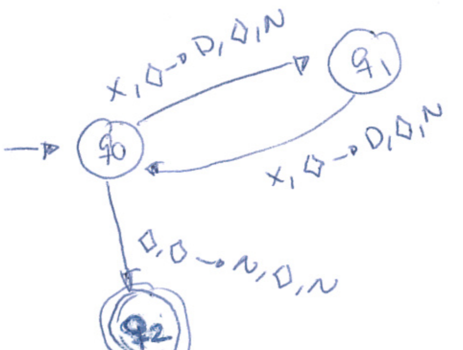
(~~Definimos~~ Denotamos x como cualquier elemento perteneciente a Σ)

$\delta(q_0, x, \diamond) \to (q_1, D, \diamond, N)$

$\delta(q_0, \diamond, \diamond) \to (q_2, N, \diamond, N)$

$\delta(q_1, x, \diamond) \to (q_0, D, \diamond, N)$

A continuación se muestra el autómata de la máquina de Turing



V

(5) Diseñar una máquina de Turing que acepte el lenguaje $\{0^{2n} 1^{n} 0^{3n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

A continuación se muestra el diseño de la máquina de turing M.

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ dada por

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}$ $\Sigma = \{0, 1\}$ $\Gamma = \{0, 1, \$, \Diamond\}$ $F = q_6$ y

las siguientes funciones de transición:

$\delta(q_0, 0, \Diamond) \to (q_1, D, 0, D)$

$\delta(q_1, 0, \Diamond) \to (q_0, D, \Diamond, N)$

$\delta(q_0, 1, \Diamond) \to (q_2, N, \Diamond, I)$

$\delta(q_2, 1, 0) \to (q_2, D, 0, I)$

$\delta(q_2, 0, \$) \to (q_3, N, \$, D)$

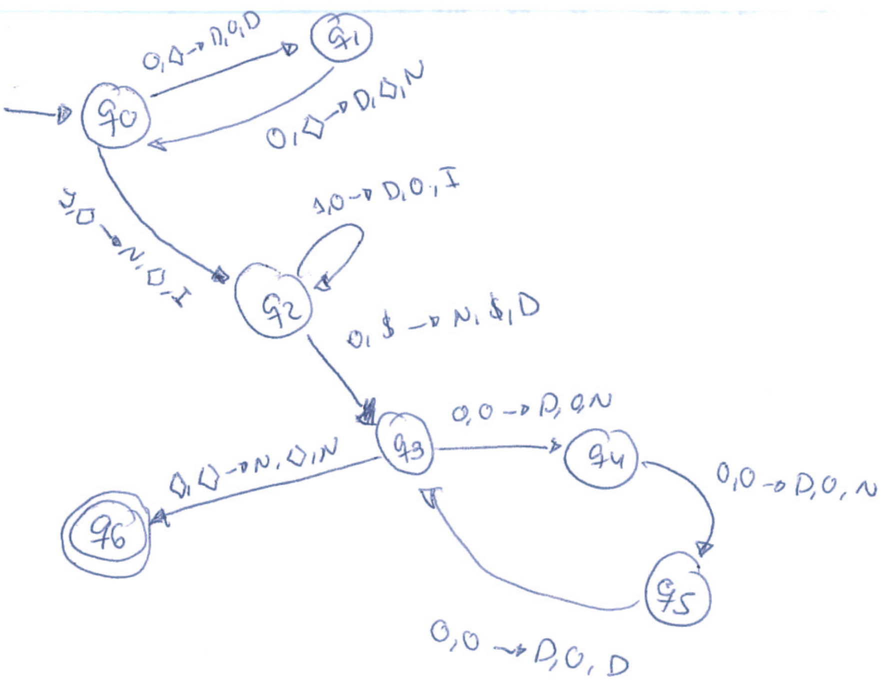
$\delta(q_3, 0, 0) \to (q_4, D, 0, N)$

$\delta(q_4, 0, 0) \to (q_5, D, 0, N)$

$\delta(q_5, 0, 0) \to (q_3, D, 0, D)$

$\delta(q_3, \Diamond, \Diamond) \to (q_6, N, \Diamond, N)$

A continuación se muestra el autómata de la máquina de Turing M.



6 a) Diseñar una máquina de Turing que no pare con alguna entrada.

A continuación se muestra el diseño de la máquina de Turing M.

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ dada por:

$Q = \{q_0, q_1, q_2\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \delta, \diamond\}$, ; $F = q_0$ y

las siguientes funciones de transición:

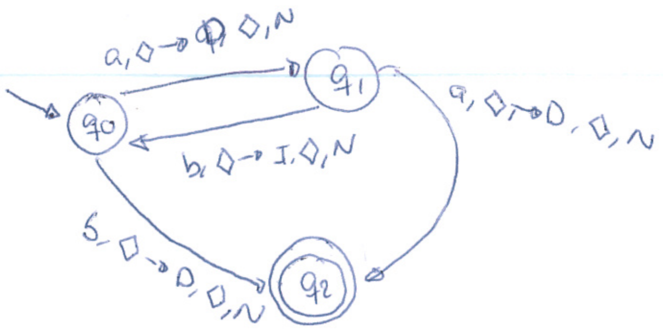
$\delta(q_0, a, \diamond) = (q_1, D, \diamond, N)$

$\delta(q_1, b, \diamond) = (q_0, I, \diamond, N)$

$\delta(q_0, b, \diamond) = (q_2, D, \diamond, N)$

$\delta(q_1, a, \diamond) = (q_2, D, \diamond, N)$

A continuación se muestra el autómata de la máquina de Turing M:



- Nuestra máquina de turing no para con entradas como "ab" o cualquier concatenación de "ab" las veces que sea. Si que para con cadenas como "aa" o "aab".

~~(No se tienen en cuenta cadenas que paran porque no existen transiciones)~~

↳ Siempre que para es porque no existen transiciones.

9) Responde si son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones y justifique brevemente, aunque formalmente, su respuesta:

1) Todo subconjunto de un lenguaje regular es un lenguaje regular.

$\boxed{\text{Falso}}$ → El lenguaje $A=\{w \in \{a,b\}^*\}$ es un lenguaje regular.

El lenguaje $B=\{a^n b^n / n \in \mathbb{N}\}$ no es un lenguaje regular.

$B \subseteq A$.

2) Si L es un lenguaje regular, entonces, también es regular $\{w | w \in L \wedge w^R \notin L\}$

$\cancel{\boxed{\text{Falso}}}$ → Necesitaríamos ~~memoria~~ para comprobar $w^R \notin L$.

$L \cap (L^R)^c$

3) El lenguaje $\{w \in \{a,b\}^* | w = w^R\}$ es regular.

$\boxed{\text{Falso}}$ → Necesitaríamos memoria para comprobar $w = w^R$ ¿?

Puede demostrarse que no es regular mediante el lema del bombeo

hacerlo

10

④ La intersección de un lenguaje independiente de contexto y un lenguaje finito da como resultado un lenguaje independiente de contexto.

√

$\boxed{\text{Verdadero}}$ → Por las propiedades de clausura de los incontextuales, sabemos que la intersección de un lenguaje incontextual y un lenguaje regular, es incontextual.

Un lenguaje finito es un lenguaje regular.

⑤ El conjunto de los lenguajes regulares es contable

$\boxed{\text{Verdadero}}$ → Existe una función inyectiva $f: A \to \mathbb{N}$

Siendo A el conjunto de los lenguajes regulares. ¿por qué?

⑩ Sea el alfabeto $\Sigma = \{a, b, c, d\}$. Considere el lenguaje,

$L = \{ a^i b^j c^k d^r \mid i+j = k+r \}$

① Diseñar una gramática independiente de contexto que genere el lenguaje

√

$S \to T \mid U$

$T \to aTd \mid V$

$V \to aVc \mid W$

$W \to bWc \mid \varepsilon$

$U \to aUd \mid X$

$X \to bXd \mid Y$

$Y \to bYc \mid \varepsilon$

√ 11

(2) Diseñar un autómata de pila que reconozca el lenguaje L

√ Sea M el autómata de pila que reconoce el lenguaje L

$M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ tal que

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$, $\Sigma = \{a, b, c, d\}$, $\Gamma = \{a, b, c, d, \$\}$,

$F = q_4$ y las siguientes funciones de transición:

$\delta(q_0, a, \$) = (q_0, a\$)$ $\quad$ $\delta(q_1, d, b) = (q_3, \varepsilon)$

$\delta(q_0, a, a) = (q_0, aa)$ $\quad$ $\delta(q_2, c, a) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_0, b, a) = (q_1, ba)$ $\quad$ $\delta(q_2, c, b) = (q_2, \varepsilon)$

$\delta(q_0, b, \$) = (q_1, b\$)$ $\quad$ $\delta(q_2, d, a) = (q_3, \varepsilon)$

$\delta(q_0, c, a) = (q_2, \varepsilon)$ $\quad$ $\delta(q_2, d, b) = (q_3, \varepsilon)$

$\delta(q_0, d, a) = (q_3, \varepsilon)$ $\quad$ $\delta(q_3, d, a) = (q_3, \varepsilon)$

$\delta(q_1, b, b) = (q_1, bb)$ $\quad$ $\delta(q_3, d, b) = (q_3, \varepsilon)$

$\delta(q_1, c, b) = (q_2, \varepsilon)$ $\quad$ $\delta(q_0, \varepsilon, \$) = (q_4, \$)$

$\delta(q_2, \varepsilon, \$) = (q_4, \$)$ $\quad$ $\delta(q_3, \varepsilon, \$) = (q_4, \$)$

mejor añadir una descripción de alto nivel

12 √

b) Construir una gramática independiente de contexto en forma normal de Chomsky que genere el lenguaje L.

- Gramática que genera L

$S \to A$

$A \to a\cancel{X}AbX \mid \epsilon$ ← eso sí

$X \to a \mid b \mid c$

- Transformamos a forma normal de Chomsky

1- Eliminación de ϵ-producciones

$S_0 \to S \mid \epsilon$

$S \to A$

$A \to aXAbX \mid aXbX$

$X \to a \mid b \mid c$

2- Quitamos las producciones unarias

$S_0 \to aXAbX \mid aXbX \mid \epsilon$

$S \to aXAbX \mid aXbX$

$A \to aXAbX \mid aXbX$

$X \to a \mid b \mid c$

3- Convertimos a forma normal

$S_0 \to WN / MN \mid \epsilon$ $M \to \cancel{aX}$ $U\cancel{X}$

$S \to WN / MN$ $N \to \cancel{bX}$ VX

$A \to WN / MN$ $W \to MA$

$X \to a \mid b \mid c$

$U \to a$

$V \to b$

14 ✓

c) Determinar razonadamente si L es un lenguaje regular o no

L no es un lenguaje regular, porque es imposible que el número de x's sea igual al número de y's puesto que no tenemos la capacidad de contar.

¿? esto no demuestra nada

(12) Dado el lenguaje $A = \{ w0^n \mid w \in \{0,1\}^*, |w| = n, n \geq 1 \}$

✓ (1) Demostrar que A no es regular.

Para realizar la siguiente demostración utilizaremos el lema del bombeo

$\forall N \; \exists \; w = 1^N 0^N \; / \; |w| = 2N \geq N \;\wedge\; \forall x,y,z \; / \; w = xyz \;\wedge$

$|xy| \leq N \;\wedge\; |y| \geq 1 \;,\; \exists i \in N \; / \; xy^iz \notin A$

$x = 1^r \qquad z = 1^{N-r-s} 0^n$

$y = 1^s \quad (s \geq 1)$

$\exists i \in N \; / \; xy^iz \notin A$

$w = xyz = 1^r 1^s 1^{N-r-s} 0^N$

Con $i = 2 \rightarrow xy^2z = 1^r 1^{2s} 1^{N-r-s} 0^N = 1^{N+s} 0^N$ y

$1^{N+s} 0^N \notin A$ ya que $s \geq 1 \rightarrow N+s > N$

Queda demostrado que A no es un lenguaje regular.

✓ 15

(13) Sea el lenguaje $L = \{ w \mid w \in \{a,b\}^*, |w|_a = |w|_b - 1 \}$

✓ (1) Demostrar que L no es regular

Para realizar la siguiente demostración usaremos el lema del bombeo

$\forall N \; \exists \; w = a^N b^{N-1} \mid |w| = 2N - 1 \geq N \; / \; w = x$

$\forall x, y, z \quad w = xyz \; \wedge |xy| \leq N \; \wedge |y| \geq 1$

$x = a^r \qquad z = a^{N-r-s} b^{N-1}$

$y = a^s \; (s \geq 1) \qquad xyz = a^r a^s a^{N-r-s} b^{N-1}$

$\exists i \in \mathbb{N} \; / \; xy^i z \notin L$

Con $i = 2 \to xy^2z = a^r a^{2s} a^{N-r-s} b^{N-1} = a^{N+s} b^{N-1}$ y

$a^{N+s} b^{N-1} \notin L$ ya que $s \geq 1 \to (N+s) - (N-1) \geq 2$

(2) Escribir una gramática independiente de contexto que genere L

$S \to ASB \mid A$

$A \to a \mid b$

$B \to a \mid b$

~~Mal~~, generas muchas palabras que no cumplen la restricción (por ejemplo aaa)

(3) Escribir una gramática independiente de contexto que genere L en forma normal de Chomsky.

$S \to XB \mid a \mid b$

$X \to AS$

$A \to a \mid b$

$B \to a \mid b$

18 ✓

(4) Escribir un autómata de pila que reconozca L.

Sea M el autómata de pila que genera L

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ dado por

$Q = \{q_0, q_1\}$ $\Sigma = \{a, b\}$ $\Gamma = \{a, b, \$\}$ $F = q_1$ y

las siguientes funciones de transición

$\delta(q_0, a, \$) = (q_0, a\$)$ $\delta(q_0, b, \$) = (q_0, b\$)$

$\delta(q_0, a, a) = (q_0, aa)$ $\delta(q_0, b, a) = (q_0, ba)$

$\delta(q_0, a, b) = (q_0, ab)$ $\delta(q_0, b, b) = (q_0, bb)$

Mal

$\delta(q_0, \epsilon, a) = (q_1, \epsilon)$ $\delta(q_0, \epsilon, b) = (q_1, \epsilon)$

Mira el ejemplo que hicimos $|w|_a = 2|w|_b$ (14-nov, ej 2.)

$\delta(q_1, a, a) = (q_1, \epsilon)$ $\delta(q_1, b, b) = (q_1, \epsilon)$

$\delta(q_1, a, b) = (q_1, \epsilon)$ $\delta(q_1, b, a) = (q_1, \epsilon)$

$\delta(q_1, \epsilon, \$) = (q_1, \$)$

14 ① Construir una gramática independiente de contexto en forma normal de Chomsky para el lenguaje. $L = \{a^n e b^m a c^{n+m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

Gramática en forma normal de chomsky

$S \to aSc \mid cT$

$T \to bTc \mid a$

Transformada a forma normal de Chomsky

$S \to AV \mid CT$ $\quad$ $A \to a$

$T \to BW \mid a$ $\quad$ $B \to b$

$V \to SC$ $\quad$ $C \to c$

$W \to TC$

2. Determinar si el siguiente lenguaje es regular, incontextual pero no regular, o no incontextual.

$L = \{a^{2n} c\, b^m a\, c^{n+3m} \mid n, m \in \mathbb{N}\}$

- Con total evidencia podemos afirmar que ~~el lenguaje~~ no es regular. → sin pruebas !!
- El lenguaje L es independiente de contexto, existe una gramática G tal que $L(G) = L$. La gramática es:

$S \to aaSc \mid cT$

$T \to bTccc \mid a$

15 ✓ Demuestre que el lenguaje $L = \{a^i b^j c^k \mid i > j > k \geq 0\}$ no es un lenguaje regular.

Para realizar la siguiente demostración utilizaremos el lema de bombeo.

$\forall N\ \exists w = a^N b^{N-1} \ /\ |w| = 2N-1 \geq N \ /\ \forall x,y,z \,/\, w = xyz \wedge$

$|xy| \leq N \wedge |y| \geq 1$

$x = a^r$ $\quad$ $z = a^{N-r-s} b^{N-1}$

$y = a^s \ (s \geq 1)$

20 ✓

$\exists i \in \mathbb{N} \mid xy^iz \notin L$

Con $i=0 \to xy^0z = a^r a^{N-r-s} b^{N-1} = a^{N-s} b^{N-1}$ y

$a^{N-s} b^{N-1} \notin L$ ya que $s \geq 1 \to N-s \leq N-1$

16 Dado $L = \{a^k b^r a^m \mid m = k+r\}$

1. Utilizando las propiedades de clausura de los lenguajes regulares demostrar que L no es un lenguaje regular.

Mal

Si hacemos $L \cap b^*a^* = \{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Como sabemos que el lenguaje $\{b^n a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

no es regular y sabemos que $b^* a^*$ es regular

podemos concluir que el lenguaje ~~L es incontextual~~.

FALSO

Por tanto, hemos demostrado que ~~L es un lenguaje incontextual~~.

no lo has demostrado

Lo que necesitas es demostrar

que no es regular.

- Si A es incontextual y B regular entonces $A \cap B$ es incontextual.
- Tú partes de que no sabes si L es incontextual ó no.

V 21

2. Diseñar una gramática independiente de contexto que genere el lenguaje L

$S \to T$

$T \to aTa \mid V$

$V \to bVa \mid \epsilon$

3. Diseñar un Autómata de pila que reconozca L

Sea M el autómata de pila que reconoce L

$M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ dado por

$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{a, b, \$\}$,

$F = \{q_3\}$ y las siguientes funciones de transición.

$\delta(q_0, a, \$) = (q_0, a\$)$ $\delta(q_0, \epsilon, a) = (q_2, \epsilon)$

$\delta(q_0, a, a) = (q_0, aa)$ $\delta(q_1, b, b) = (q_1, bb)$

$\delta(q_0, b, a) = (q_1, ba)$ $\delta(q_1, \epsilon, b) = (q_2, \epsilon)$

$\delta(q_0, b, \$) = (q_1, b\$)$ $\delta(q_2, a, b) = (q_2, \epsilon)$

$\delta(q_2, a, a) = (q_2, \epsilon)$ $\delta(q_2, \epsilon, \$) = (q_3, \epsilon, \$)$