EJERCICIOS TEORÍA DE LA COMPUTACIÓN

EDUARDO CRIADO 31-10

Ejercicio 1 - Demostrar que los lenguajes no son regulares.

a) $A = \{ a^i b^{2i} \mid i \in \mathbb{N} \}$

$\forall N$ existe $w = a^N 2^{2N}$ $|w| = 3N \geq N$

$\forall x, y, z$, $w = xyz$ y $|xy| \leq N$ y $|y| \geq 1$

Dividimos w en 3 partes

$x = a^r$, $y = a^s$, $z = a^{N-r-s} b^{2N}$

Ahora tomamos que para $i = 2$

$xy^i z = xyyz = a^{N+s} b^{2N} \notin A$

y por tanto A no es regular.

c) $A = \{ a^{n!} \mid n \in N \}$ $\forall N$, $w = a^{N!}$ $|w| = N! \geq N$

$\forall x, y, z$, $w = xyz$ $|xy| \leq N$

$|y| \geq 1$

$x = a^r$, $y = a^s$, $z = \cancel{a^{N-r-s(N-1)!}}$ $a^{N!-r-s}$

ya que $n! = n(n-1)!$ ¿y qué?

Si tomamos $i = 2$, $xyyz = \cancel{a^{N+s(N-1)!}}$ $\notin A$

$a^{N!+s}$

A no es regular.

¿por qué?

~~hay que razonar~~

$N!+s < (N+1)!$

d) $A = \{ 0^n \mid n$ no es primo $\}$

Vamos a intentar demostrar que el complementario no es regular (A^c) y por tanto A tampoco.

$A^c = \{0^n \mid n \text{ es primo}\}$

Dado que los números primos son infinitos, siempre podremos encontrar un número primo p t.q $p \geq N+2$

y así $\forall N$, $w = 0^p$ $|w| \geq N$

$\forall x, y, z$, $w = xyz$ $|xy| \leq N$ y $|y| \geq 1$

Pongamos que $|y| = m$ y como $|w| = |xyz| = p$

entonces $|xz| = p - m$.

Si tomamos $i = p - m$, $xy^{p-m}z$

$$|xy^{p-m}z| = |xz| + (p-m)|y| =$$

$$= (p-m) + (p-m)m = (p-m)(m+1)$$

$p-m$ es mayor que 1, al igual que $m+1$ ya que $|y| = m \geq 1$, por tanto el producto de estos dos es un número compuesto

A^c no es regular, y tampoco A lo es.

e) ✓ $A = \{0^{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$ $\forall N$, 0^{N^2}

$\forall x, y, z$, $w = xyz$ con $|xy| \leq N$ $|y| \geq 1$

Sabemos que las distancias entre cuadrados perfectos aumentan $(0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, \dots)$

Si tomamos $i = 2$, observamos que

$|xyz| = N^2$ y $|xyz| < |xy^2z|$, $N^2 < |xy^2z|$

$|xy^2z| = |xyyz| = |xyz| + |y| = N^2 + |y| \leq N^2 + N$

ya que $|xy| \leq N$ También vemos que $N^2 + N \leq (N+1)^2$

Eduardo Criado

Por lo tanto, tenemos que:

$$N^2 < |xy^2z| \leq N^2 + N < (N+1)^2$$

la longitud de w se encuentra entre dos cuadrados perfectos, $xyyz \notin A$ y A no es regular

h) $A = \{a^{2^n} \mid n \in N\}$ $\forall N,\ w = a^{2^N}$ $|w| = 2^N \geq N$

$\forall x,y,z$, $w = xyz$ $|xy| \leq N$

$|y| \geq 1$

Si $|xy| \leq N$, y además $N < 2^N$ y $|y| < 2^N$

Tomamos $i=2$, $xyyz$ $|xyyz| = |xyz| + |y| < 2^N + 2^N =$

$= 2^{N+1}$

Tenemos que $2^N < |xyyz| < 2^{N+1}$, por lo que $w \notin A$

y A no es regular.

j) $A = \{0^n 1^m \mid n \neq m\}$

Ya demostramos que el lenguaje $\{0^i 1^j \mid i > j\}$ no era regular. Tampoco lo es $\{0^i 1^j \mid j > i\}$

Como la unión de estos no es regular y es ~~el complementario de~~ A, ~~A no es regular~~

Mal, la unión de no regulares puede ser regular.

2. $A = \{vv \mid v \in \{a,b\}^*\}$

Cojamos una palabra que nos sirva para ilustrar la no regularidad del lenguaje, como $w = a^N b a^N b$

$|w| = 2N + 2 \geq N$ $\forall x,y,z$, $w = xyz$ $|y| \geq 1$ $|xy| \leq N$

Si $x = a^r$ y $y = a^s$, $s \geq 1$ $z = a^{N-r-s} b a^N b$

Para $i=2$ $xy^iz \notin A$

$xy^2z = a^{N+s} b a^N b \notin A$ ya que $s \geq 1$

A no es regular.

3.

No es regular ya que el lenguaje formado por v es regular, pero al concatenarlo con $\{vv \mid v \in \{a,b\}^*\}$ que ya hemos demostrado que no es regular, se convierte en un lenguaje no regular.

Mal, la concatenación de no regulares puede ser regular.

Mario Arcega

1. $A = \{ w \mid |w|_a = |w|_b$ y para todo u prefijo de w, $|u|_a \geq |u|_b \}$

$A \cap a^* b^* = \{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$

$\{ a^n b^n \mid n \in \mathbb{N} \}$ no es regular

$a^* b^*$ es regular

luego A no es regular

4. $A = \{ v v^R \mid v \in \{a,b\}^* \}$

$\forall N \exists w \in A$ t.q. $w = a^N b b a^N$ $|w| = 2N+2 \geq N$

$\forall w = xyz$ $|xy| \leq N$, $x = a^r$, $y = a^s$, $z = a^{N-r-s} b b a^N$

$\exists i$ con $xy^i z \notin A$

para $i = 2$

$w = a^r a^{2s} a^{N-r-s} b b a^N = a^{N+s} b b a^N \notin A$ $(s \geq 1)$