web

Patricia Castillo López de la Manzanara

EJERCICIO 1

Para demostrar si las proposiciones son ciertas, vamos a coger las tablas de verdad de las proposiciones de la conjunción, la condicional y la bicondicional. Y a partir de ellas, asemejando las proposiciones con la realidad, obtendremos si son verdaderas o falsas.

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

A	B	$A \Rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

A	B	$A \Leftrightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

a) Los perros tienen alas sólo si los gatos tienen alas. ~~(p<->q)~~ p → q

En este caso, la p="los perros tienen alas" si lo identificamos con la realidad es falsa, y q="los gatos tienen alas" también es falsa.

En conclusión, en una ~~bi~~condicional, ~~F y F → V~~. Obtenemos que esta proposición es VERDADERA

ou

b) Los pájaros tienen alas sólo si los gatos tienen alas. ~~(p<->q)~~ p → q

En este caso, la p="los pájaros tienen alas" si lo identificamos con la realidad es verdadera, y q="los gatos tienen alas" es falsa.

En conclusión, en una ~~bi~~condicional, V y F → F. Obtenemos que esta proposición es FALSA

c) Si los gatos tienen alas, entonces los pájaros tienen alas. (p-> q) (este es el converso del anterior)

En este caso, p="los gatos tienen alas" si lo identificamos con la realidad es falsa y q="los pájaros tienen alas" es verdadera.

En conclusión, en una condicional, F y ~~F~~ V → V. Obtenemos que esta proposición es VERDADERA.

d) Las serpientes tienen piernas si y sólo si los hámsteres tienen piernas. (p<->q)

En este caso, p="las serpientes tienen piernas" si lo identificamos con la realidad es falsa y q="los hámsteres tienen piernas" es verdadera.

En conclusión, en una bicondicional, F y V → F. Obtenemos que esta proposición es FALSA.

e) Si las ranas tienen pelo y los ratones tienen ojos, entonces los tiburones no tienen dientes.(p^q-> r)

En este caso, p="las ranas tienen pelo" si lo identificamos con la realidad es falsa, q="los ratones tienen ojos" es verdadero. Esto es una conjunción, por lo que obtenemos que F y V es F. Y por otro lado r="los tiburones no tienen dientes" es falsa.

En conclusión, en una condicional con lo que obtenemos de la conjunción y r, obtenemos que F y F -> V. La proposición es VERDADERA.

EJERCICIO 2

a) $\emptyset \subseteq \emptyset$ → Esta afirmación es cierta
Nos encontramos ante una de las propiedades del conjunto vacío, dicha propiedad nos dice que el único subconjunto del conjunto vacío es él mismo.

$$A \subseteq \emptyset \quad \textit{sólo sí} \quad A = \emptyset \rightarrow \emptyset \subseteq \emptyset$$

b) $\emptyset \in \emptyset$ → Esta afirmación es falsa
Esto se debe a que "pertenece" se escribe entre un elemento de un conjunto y un conjunto, el conjunto vacío no posee elementos, por lo que no podemos establecer que el conjunto vacío pertenece al vacío.

c) $\varepsilon \in \{\varepsilon\}$ → Esta afirmación es cierta
En este caso cumple que "pertenece" se escribe entre un elemento de un conjunto y un conjunto. El conjunto está formado por la cadena vacía por lo que la cadena vacía pertenece al conjunto.

d) $\emptyset \subseteq \cancel{\in} \{\varepsilon\}$ → Esta afirmación es cierta
Nos encontramos ante otra propiedad del conjunto vacío, la cual nos dice que el conjunto vacío es siempre subconjunto.

EJERCICIO 3

En este caso para demostrar si estas igualdades son ciertas voy a utilizar tres ejemplos de conjuntos y aplicar dichas igualdades.

$$A = \{a, b, abc\}$$
$$B = \{b, bbc, ba\}$$
$$C = \{a, bac, bbc\}$$

a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$B \cap C = \{bbc\}$

$A \cup (B \cap C) = \{a, b, abc, bbc\}$

$A \cup B = \{a, b, abc, bbc, ba\}$

$A \cup C = \{a, b, abc, bac, bbc\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, abc, bbc\}$

$A \cup (B \cap C) = \{a, b, abc, bbc\}$

$(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{a, b, abc, bbc\}$

$\{a, b, abc, bbc\} = \{a, b, abc, bbc\}$

Esta igualdad es la propiedad distributiva de la unión de dos conjuntos.

b) $A \cap (A \cup B) = A$

$A \cup B = \{a, b, abc, bbc, ba\}$

$A \cap (A \cup B) = \{a, b, abc\}$

$A \cap (A \cup B) = \{a, b, abc\}$

$A = \{a, b, abc\}$

$\{a, b, abc\} = \{a, b, abc\}$

Esta igualdad es una propiedad de los conjuntos, en este caso es la absorción de la intersección.

Mal, los ejemplos no demuestran nada.
Hay que demostrarlo por contenidos:
$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C)$ porque si $x \in A \cup (B \cap C)$ ...

c) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
$B \cap C = \{bbc\}$
$A - (B \cap C) = \{a, b, abc\}$
$A - B = \{a, abc\}$
$A - C = \{b, abc\}$
$(A - B) \cup (A - C) = \{a, b, abc\}$

$A - (B \cap C) = \{a, b, abc\}$
$(A - B) \cup (A - C) = \{a, b, abc\}$
$\{a, b, abc\} = \{a, b, abc\}$

EJERCICIO 4

$\Sigma = \{a, b, c\}$
$A = \{ab, bc, bb\}$

$B = \{\varepsilon\}$
$C = \emptyset$

D = {bb, aabc, c, cc}

a) $|C| = 0$ $\quad |B| = 1$

b) $(A \cdot D) \cup (\Sigma \cdot C) = (A \cdot D) \cup \emptyset = (A \cdot D) =$
$\{abbb, abaabc, abc, abcc, bcbb, bcaabc, bcc, bccc, bbbb, bbaabc, bbc, bbcc\}$

c) $\cancel{\Sigma^n = \Sigma \ldots . \Sigma = \{a, b, c, aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \}}$ Mal, eso sería Σ^*

d) $A^* \cap D^* = \{ (bb)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
$A^* = \{\varepsilon, ab, bc, bb, abab, abbc, abbb, bcab, bcbc, bcbb, bbab, bbbc, bbbb, \ldots \ldots \ldots \ldots\}$
$D^* = \{\varepsilon, bbbb, bbaabc, bbc, bbcc, aabcbb, aabcaabc, aabcc, aabccc, \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots\}$
~~Al tener una muestra de $A^* y\, D^*$ podemos observar que las únicas cadenas que coinciden de ambas son aquellas que empiezan por b y particularmente las que empiezan por bb, así podemos concluir que la intersección de $A^* y\, D^*$ son aquellas cadenas que están formadas por un número par de b.~~ Mal, esto no demuestra nada

e) $(A \cup D)^*$
$A \cup D = \{ab, bc, bb, aabc, c, cc\}$
$(A \cup D)^*$ = {ab, bc, bb, aabc, c}*
$= \{\mathcal{E}, ab, bc, bb, aabc, c, cc, abab, abbc, \cancel{abbb}, abaabc, abc, abcc, bcab, bcbc, bb, bcaabc, \ldots\}$

f) $D^* - A^*$
En este caso el resultado es D^* menos las cadenas que están formadas por un número par de b.

EJERCICIO 5

$$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$$

Paso base: n=0 $\Sigma^0 = \{\varepsilon\} \rightarrow |\Sigma^n| = 1$
$|\Sigma|^0 = 1$

Paso de inducción: $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$
n=n+1
¿$|\Sigma^{n+1}| = |\Sigma|^{n+1}$?

$$\left.\begin{array}{l} |\Sigma^{n+1}| = |\Sigma^n \cdot \Sigma| = |\Sigma^n| \cdot |\Sigma| \\ |\Sigma|^{n+1} = |\Sigma|^n \cdot |\Sigma| \end{array}\right\} \quad |\Sigma^n| = |\Sigma|^n$$

$$|\Sigma|^{n+1} = |\Sigma|^n \cdot |\Sigma|$$

EJERCICIO 6

$$L^+ = \bigcup_{n=1}^{\infty} L^n = L^1 \cup L^2 \ldots \ldots \ldots$$

ε (Cadena vacía) sólo pertenece a L^+ si ε se encuentra en L, ya que si no la única forma de esté contenida es que n=0 y es este caso n empieza en 1.

EJERCICIO 7

$A = \{w \mid w\ empieza\ por\ a\}$
$B = \{w \mid w\ termina\ en\ b\}$

$A \cdot B = \{\ w \mid w\ empieza\ por\ a\ y\ termina\ en\ b\}$

Por ejemplo:
$A = \{abc, aa\}$
$B = \{cb, bb\ \}$

$A \cdot B = abccb, abcbb, aacb, aabb\}$

Sin demostrar

un ejemplo no demuestra nada

EJERCICIO 8

¿$(uv)^R = v^R u^R$?

Por inducción sobre |v|. Si |v|=1, entonces v= ε.

Así, $(u\varepsilon)^R = \varepsilon^R u^R = v^R u^R$. Por lo tanto vamos a asumir que para toda cadena $v \in \Sigma^*$, debemos probarla para toda cadena con va con $a \in \Sigma$.

$(uva)^R = a(uv)^R$	Definición de inversa
$= av^R u^R$	Hipótesis de inducción
$= (va)^R u^R$	Definición de inversa

¿ $(AB)^R = B^R A^R$?

El igual que pasa con las cadenas, si un lenguaje B= $\{\varepsilon\}$, |B| = 1.

Así, obtenemos que la hipótesis de inducción sea $(A\varepsilon)^R = \varepsilon^R A^R = B^R A^R$. Vamos a probar que si para un lenguaje B le añadimos una cadena a, obtenemos:

$(ABa)^R = a(AB)^R$	Definición de inversa
$= aB^R A^R$	Hipótesis de inducción
$= (Ba)^R A^R$	Definición de inversa

Mal, mezclas cadenas y lenguajes

$$(AB)^R = \{w^R \mid w \in AB\} = \{(uv)^R \mid u \in A, v \in B\}$$
$$\underset{\uparrow}{=} \{v^R u^R \mid u \in A, v \in B\} = B^R A^R$$

por tu demostración