Lenguajes decidibles y semidecidibles

Elvira Mayordomo, Universidad de Zaragoza

Hoy

1. **Lenguaje semidecidible y lenguaje decidible (repaso)**
2. Todo decidible es semidecidible
3. Ejemplos de decidibles
4. Más ejemplos de semidecidibles: el problema de parada
5. Los decidibles son cerrados por complemento
6. Primer ejemplo de no decidible
7. Ejemplos de no decidibles

Recordad: Programas …

- Consideramos programas sintácticamente correctos …

- El único añadido es que la memoria es ilimitada (es decir no hay nunca errores por “overflow”)

Luego si probamos que algo no se puede resolver con ningún programa es un resultado muy general …

Nos interesan especialmente

```
tipo  tpresultado = (acepta,rechaza)
procedimiento ejemplo (ent w:cadena; sal z:tpresultado)
```

Aceptar

Aceptar Entrada → Si el programa para y devuelve acepta

Rechazar Entrada → Si el programa para y no devuelve acepta

o

Si el programa no para nunca

El lenguaje aceptado

Para un programa p

$$L(p) = \left\{ w : \begin{array}{l} \text{el programa } p \text{ con entrada } w \\ \text{para y devuelve } \textit{acepta} \end{array} \right\}$$

Definición:

Un lenguaje es semidecidible si es el aceptado por un programa

Programas que paran siempre

Una programa p para siempre si para cualquier cadena w, p con entrada w para

- Estos son los programas realmente útiles

Lenguajes decidibles

Definición:

Un lenguaje L es decidible si es el aceptado por un programa que para siempre

$w \in L \Rightarrow$ p para y devuelve acepta

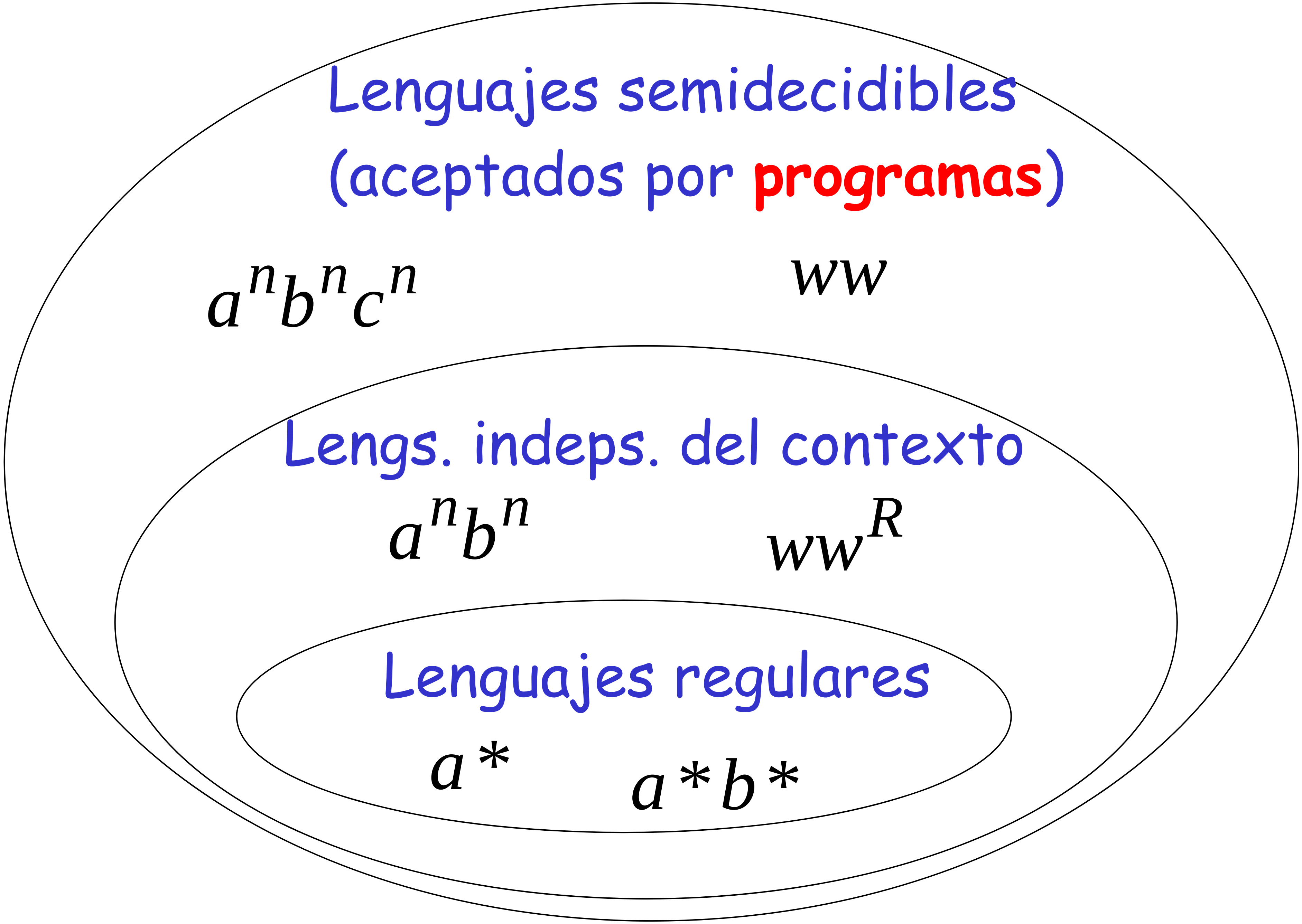
$w \notin L \Rightarrow$ p para y no devuelve acepta

Lenguajes decidibles

Un lenguaje L es <u>decidible</u> si es el aceptado por un programa que para siempre

En otras palabras:

Un lenguaje L es decidible si existe un algoritmo que resuelve completamente el problema de pertenencia a L


Lenguajes semidecidibles
(aceptados por **programas**)
$a^n b^n c^n$
ww
Lengs. indeps. del contexto
$a^n b^n$
ww^R
Lenguajes regulares
a^*
$a^* b^*$

Hoy

1. Lenguaje semidecidible y lenguaje decidible (repaso)
2. **Todo decidible es semidecidible**
3. Ejemplos de decidibles
4. Más ejemplos de semidecidibles: el problema de parada
5. Los decidibles son cerrados por complemento
6. Primer ejemplo de no decidible
7. Ejemplos de no decidibles

Resultado elemental

Teorema

Si *A* es un lenguaje decidible entonces es semidecidible

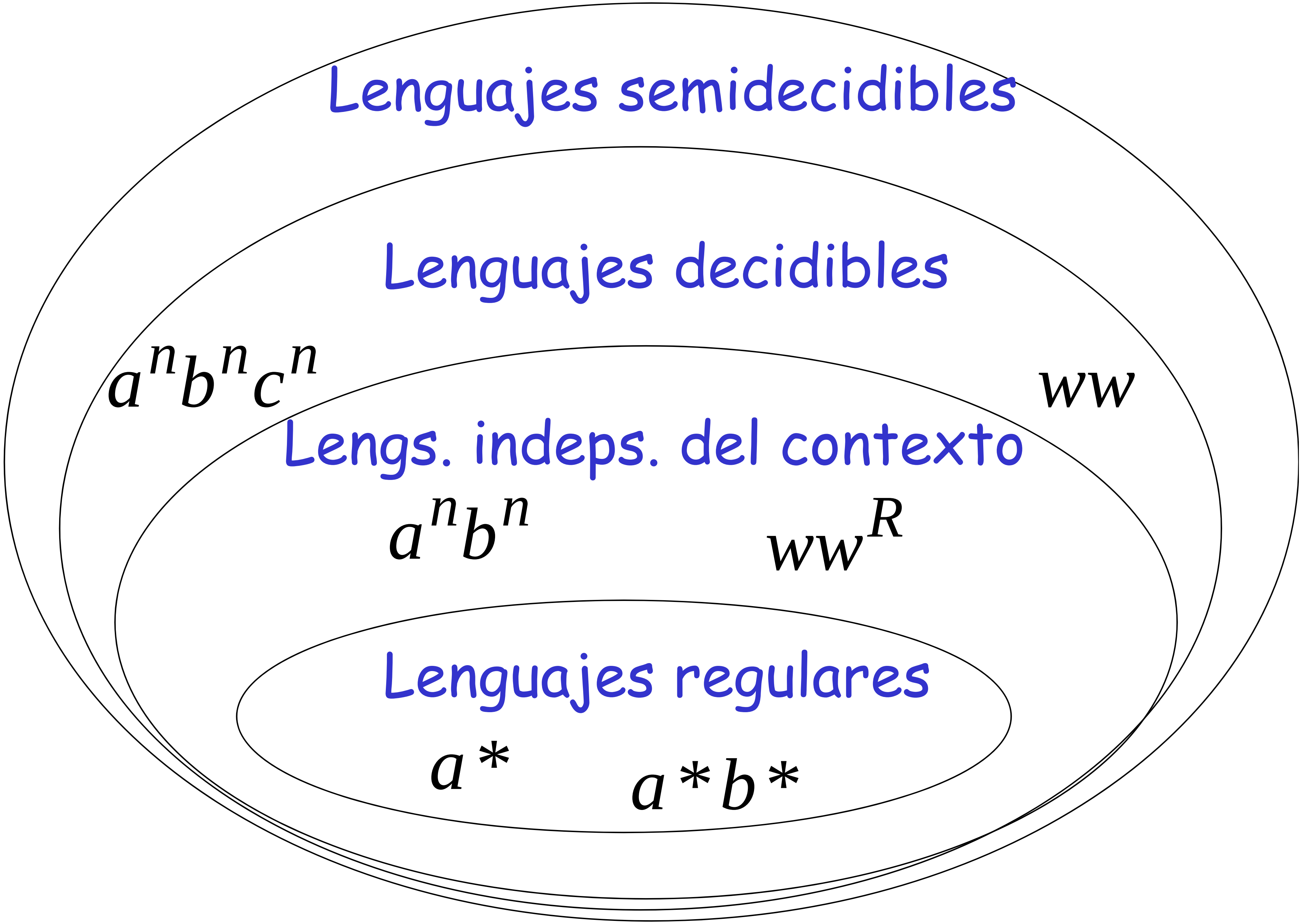
Demostración. Mirar las definiciones:

- Semidecidible: existe un programa que acepta *A*
- Decidible: existe un programa que acepta *A* y para siempre

Dicho de otra forma

Teorema

Si *A* no es semidecidible entonces *A* no es decidible



Lenguajes semidecidibles
Lenguajes decidibles
$a^n b^n c^n$
ww
Lengs. indeps. del contexto
$a^n b^n$
ww^R
Lenguajes regulares
a^*
a^*b^*

??

¿Hay lenguajes semidecidibles pero no decidibles?

Veremos que sí utilizando la famosa técnica de diagonalización

Hoy

1. Lenguaje semidecidible y lenguaje decidible (repaso)
2. Todo decidible es semidecidible
3. **Ejemplos de decidibles**
4. Más ejemplos de semidecidibles: el problema de parada
5. Los decidibles son cerrados por complemento
6. Primer ejemplo de no decidible
7. Ejemplos de no decidibles

Ejemplos de decidibles

Cualquier lenguaje para el que sepamos hacer un algoritmo que pare siempre y resuelva el problema de pertenencia:

- $\{a^n b^n c^n \mid n \in N\}$

- $\{ww \mid w \in \{a,b\}^*\}$

- Todos los regulares y todos los incontextuales

Ejemplos de decidibles

$A = \{ (M, N) \mid M$ y N son AFDs que aceptan el mismo lenguaje$\}$

Un algoritmo que acepta A y para siempre:

Entrada N, M

N'= minimizar(N)

M'= minimizar(M)

Comparar (N', M') si $N' \cong M'$

  entonces acepta

  sino rechaza

Ejemplos de decidibles

- A= { (M, N) | M y N son AFDs que aceptan el mismo lenguaje}
- B= { (M, N) | M y N son AFnDs que aceptan el mismo lenguaje}
- C= {(e,f) | e y f son dos expresiones regs. que representan el mismo leng.}

Hoy

1. Lenguaje semidecidible y lenguaje decidible (repaso)
2. Todo decidible es semidecidible
3. Ejemplos de decidibles
4. **Más ejemplos de semidecidibles: el problema de parada**
5. Los decidibles son cerrados por complemento
6. Primer ejemplo de no decidible
7. Ejemplos de no decidibles

Ejemplos de lenguajes semidecidibles

- Todos los lenguajes decidibles que hemos visto (todos los decidibles son semidecidibles)

- El que vamos a ver a comtiuación …

El problema de parada

El problema de parada

Dado un programa p y una cadena w

¿p con entrada w para?

El problema de parada

H= { (p , w) : p es un programa que para con entrada w}

Cada programa es una cadena, y codificamos (p,w) como p#w

<u>H es el lenguaje que representa el problema de parada</u>

¿Qué sabemos sobre H?

Hoy vamos a ver que

- H es semidecidible: existe un programa que acepta H
- H no es decidible: NO existe un programa que acepta H y para siempre

- Es decir, no existe un programa que resuelva el problema de parada, aunque sí un programa que acepta H (aunque en caso de rechazo se suele colgar)

Para ver que H es semidecidible

H= { (p , w) : p es un programa que para con entrada w}

- Necesitamos un programa que simule la ejecución de otro programa
- Empezamos con un caso más fácil, un programa que simule una máquina de Turing

Simulando máquinas de Turing

Podemos simular una máquina M con entrada w durante T pasos

Procedimiento SimulaMT (ent M:cadena; ent w:cadena; ent T:natural; sal ha_parado:booleano; sal resultado:tpresultado)

{Simula T pasos de la ejecución de M con entrada w}
{ha_parado=True cuando ha parado en tiempo<=T}
{resultado=acepta si ha parado en estado final}

Simulando máquinas de Turing

Procedimiento SimulaMT (ent M:cadena; ent w:cadena; ent T:natural; sal ha_parado:booleano; sal resultado:tpresultado)

Variables ...

{Simula T pasos de la ejecución de M con entrada w}

principio

ha_parado:= False

tiempo:=0

entrada:= concatena("$",w) {seguido de blancos}

memoria:= ... {$ seguido de blancos}

cabeza_ent:=2; cabeza_mem:=2

q:=q0; a:=w(1); b:=blanco

Simulando máquinas de Turing

```
MientrasQue (Not ha_parado) AND (tiempo<T)
  hacer
  Si "hay una transición" desde (q,a,b)
     "seguirla" { aplicar transición actualizando q,a,b
                        y cabezas }
     tiempo:=tiempo+1
  sino ha_parado:= True
  Fsi
 Fmq
 Si esFinal(q) entonces resultado:= acepta
 sino resultado:=rechaza; Fsi
fin
```

Simulando programas

Podemos simular un programa p con entrada w durante T pasos (como hacen los intérpretes o los debuggers)

Procedimiento Simula (ent p:cadena; ent w:cadena; ent T:natural; sal ha_parado:booleano; sal resultado:cadena)

{Simula T pasos de la ejecución de p con entrada w}
{ha_parado=True cuando ha parado en tiempo<=T}
{resultado= resultado de p con entrada w si ha parado}

Teorema

H es semidecidible

H= { (p , w) : p es un programa que para con entrada w}

H es semidecidible

H= { (p , w) : p es un programa que para con entrada w}

```
Procedimiento aceptaH(ent p:cadena; ent w:cadena;
   sal z:tpresultado)
Variable res:tpresultado
Principio
   T:=1; ha_parado:=false
   MientrasQue NOT ha_parado
         simula(p,w,T,ha_parado,res)
         T:=T+1
   Fmq
   Si ha_parado entonces z:=acepta
Fin
```

H es semidecidible

Si $(p,w) \in H$ el programa aceptaH acepta (p,w)

Si $(p,w) \notin H$ el programa aceptaH con entrada (p,w) se cuelga !!!

Hoy

1. Lenguaje semidecidible y lenguaje decidible (repaso)
2. Todo decidible es semidecidible
3. Ejemplos de decidibles
4. Más ejemplos de semidecidibles: el problema de parada
5. **Los decidibles son cerrados por complemento**
6. Primer ejemplo de no decidible
7. Ejemplos de no decidibles

Los decidibles son cerrados por complemento

- Sea A decidible: hay un algoritmo que acepta A y para siempre
- Un algoritmo para $\overline{A}$ es como el algoritmo para A pero cambiando “devuelve acepta“ por “devuelve rechaza“ y viceversa

Los decidibles son cerrados por complemento

- Si A es decidible entonces $\overline{A}$ es decidible
- Si $\overline{A}$ no es decidible entonces A no es decidible

Importante:

- Los semidecidibles NO son cerrados por complemento
- Por ejemplo, $\overline{H}$ no es semidecidible

Hoy

1. Lenguaje semidecidible y lenguaje decidible (repaso)
2. Todo decidible es semidecidible
3. Ejemplos de decidibles
4. Más ejemplos de semidecidibles: el problema de parada
5. Los decidibles son cerrados por complemento
6. **Primer ejemplo de no decidible**
7. Ejemplos de no decidibles

No decidibles ...

Para cualquier aplicación práctica sólo nos interesan los programas que paran siempre

Resolver un problema es encontrar un programa que lo resuelva y pare siempre

→Los decidibles son los que podemos resolver

¿Hay no decidibles interesantes?

No decidible = Indecidible

Primer ejemplo de indecidible

Vamos a utilizar diagonalización para ver nuestro primer ejemplo de indecidible o no decidible

No decidible = Indecidible

Diagonalización

Diagonalizar una tabla

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
R1	0	1	1	0	0	1	0	1
R2	1	1	1	0	0	1	0	0
R3	0	0	0	1	1	1	0	1
R4	0	1	0	1	0	1	0	1
R5	1	1	1	0	1	1	0	0
R6	1	0	1	0	1	1	0	1
R7	1	0	0	1	1	1	0	1
R8	0	0	1	1	1	1	0	1

¿Cómo encontrar una fila distinta a todas?

Diagonalizar una tabla

	b1	b2	b3	b4	b5	b6	b7	b8
R1	0	1	1	0	0	1	0	1
R2	1	1	1	0	0	1	0	0
R3	0	0	0	1	1	1	0	1
R4	0	1	0	1	0	1	0	1
R5	1	1	1	0	1	1	0	0
R6	1	0	1	0	1	1	0	1
R7	1	0	0	1	1	1	0	1
R8	0	0	1	1	1	1	0	1
	1	0	1	0	0	0	1	0

Un enunciado curioso …

- Cada programa p lo codificamos como una cadena
- Luego si un programa p tiene como entrada una cadena, <u>podemos considerar como entrada de p el propio p</u>
- No es tan raro, podemos escribir un compilador de Java en Java
- Y el compilador se puede compilar a sí mismo

Un lenguaje no decidible ...

A= { p : p es un programa que acepta la entrada p}

Teorema: A no es decidible

Demostración:

Sea la siguiente tabla (infinita): para cada programa p hay una fila, y para cada programa p hay una columna

El la posición p,q escribimos 1 si el programa p acepta q y escribimos 0 si no

Demostración

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
p1	0	1	1	0	0	1	0	1
p2	1	1	1	0	0	1	0	0
p3	0	0	0	1	1	1	0	1
p4	0	1	0	1	0	1	0	1
p5	1	1	1	0	1	1	0	0
p6	1	0	1	0	1	1	0	1
p7	1	0	0	1	1	1	0	1
p8	0	0	1	1	1	1	0	1

Si L es semidecidible ... una de las filas es L

Demostración

	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
p1	0	1	1	0	0	1	0	1
p2	1	1	1	0	0	1	0	0
p3	0	0	0	1	1	1	0	1
p4	0	1	0	1	0	1	0	1
p5	1	1	1	0	1	1	0	0
p6	1	0	1	0	1	1	0	1
p7	1	0	0	1	1	1	0	1
p8	0	0	1	1	1	1	0	1

¿Qué es la diagonal?

Demostración

En la diagonal hay 1 si p acepta p y 0 si no

Esto es 1 si p$\in A$ y 0 si p$\notin A$

¿Qué pasa si diagonalizamos?

Demostración

En la diagonal hay 1 si p acepta p y 0 si no

Esto es 1 si $p \in A$ y 0 si $p \notin A$

¿Qué pasa si diagonalizamos?

- Obtenemos una fila que no está en la tabla
- Obtenemos el complementario de la diagonal (1 si $p \in \overline{A}$ y 0 si $p \notin \overline{A}$)

Demostración

Si hay un programa Q que acepte $\overline{A}$, tenemos que la fila de Q en la tabla tiene

1 si p$\in\overline{A}$ y 0 si p$\notin\overline{A}$

Pero eso es imposible porque hemos visto que una fila así no está en la tabla (es el complementario de la diagonal)

Luego no hay un programa que acepte $\overline{A}$

Demostración

Luego no hay un programa que acepte $\overline{A}$

Luego $\overline{A}$ no es semidecidible

(decidible →semidecidible)

Por tanto $\overline{A}$ no es decidible

(decidible cerrado por complemento)

Por tanto A no es decidible

Fin de la demostración

Hoy

1. Lenguaje semidecidible y lenguaje decidible (repaso)
2. Todo decidible es semidecidible
3. Ejemplos de decidibles
4. Más ejemplos de semidecidibles: el problema de parada
5. Los decidibles son cerrados por complemento
6. Primer ejemplo de no decidible
7. **Ejemplos de no decidibles**

El problema de parada

H= { (p , w) : p es un programa que para con entrada w}

- H no es decidible (por diagonalización)
- Luego H es semidecidible pero no es decidible

El problema diagonal de parada

K= { p : p es un programa que para con entrada p}

- K no es decidible

Indecidibles famosos

||

no decidibles

Recordad

Resolver un problema es encontrar un programa que lo resuelva y pare siempre

Un indecidible es un problema que no podemos resolver con ningún algoritmo

Indecidible ya visto

El problema de parada

Dado un programa p y una cadena w

¿p con entrada w para?

Casi visto

El problema de pertenencia

Dado un programa p y una cadena w

¿p acepta w?

Otro problema indecidible

El problema de parada para MT

Dada una máquina de Turing M y una cadena w

¿La máquina M con entrada w para?

Otro problema indecidible

La detección de virus

Dado un programa p

¿Es p un virus?

Un virus es un programa que puede infectar otros programas
modificándolos incluyendo
una copia (que puede estar modificada) de sí mismo

Unos cuantos más

- Dados dos programas, ¿calculan lo mismo?
- Dado un programa p, ¿p para con alguna entrada?

Algunos problemas indecidibles sobre gramáticas:

- Dadas G_1, G_2 gramáticas independientes de contexto, ¿ $L(G_1) = L(G_2)$?

Algunos problemas indecidibles sobre gramáticas:

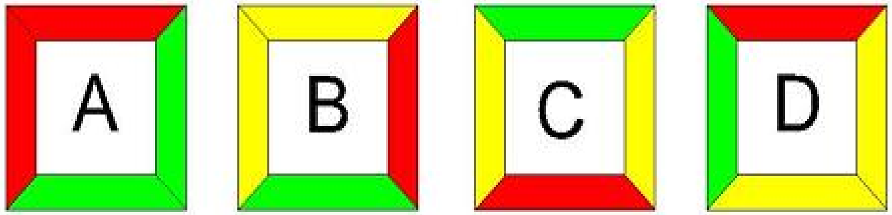
- Dadas G_1, G_2 gramáticas independientes de contexto, ¿ $L(G_1) \cap L(G_2) = \varnothing$?

- Dada una gramática independiente de contexto G, ¿es G ambigua?

Y otro: Wang tiles

Dado un conjunto finito de baldosas, con un color en cada lado

Ejemplo:



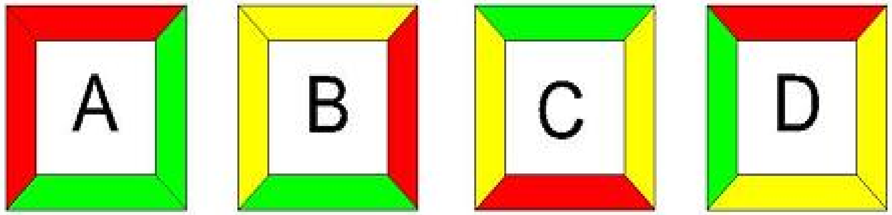
¿puede embaldosarse con ellos el plano, de forma que los lados contiguos tengan el mismo color?

(se pueden hacer tantas copias como se quiera, no se pueden girar ni invertir)

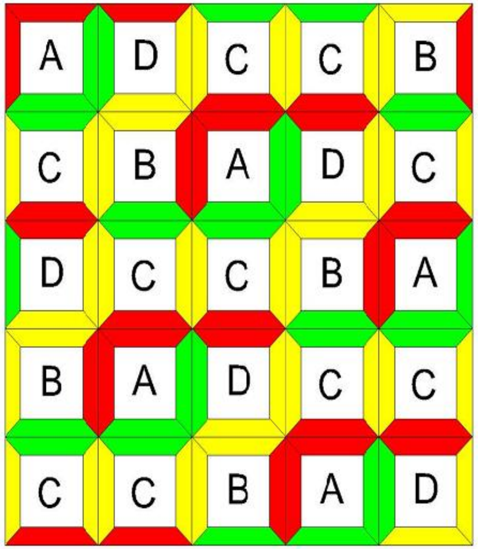
Wang tiles

Ejemplos fáciles: periódicos

Datos:



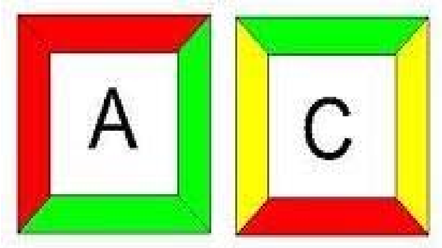
Embaldosado ampliable:



Wang tiles

Ejemplos fáciles:

Datos:

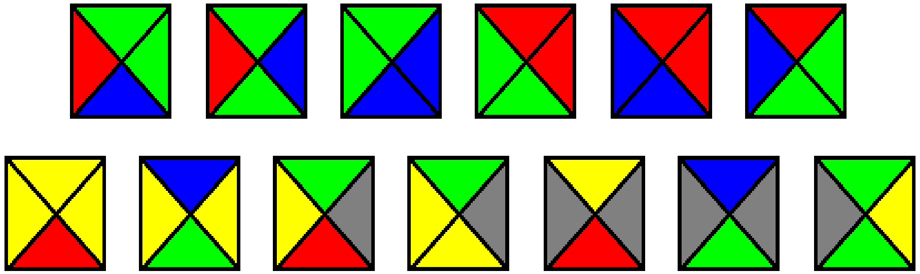


Respuesta: No se puede embaldosar el plano

Wang tiles

Ejemplos difíciles: aperiódicos

Datos:



Respuesta: Se puede embaldosar el plano de forma no periódica (**Ejercicio: intentarlo**)

Muy aplicados para construir imágenes y texturas

Wang tiles

El problema es indecidible: no hay un algoritmo que lo resuelva

Al principio Wang presentó un algoritmo que lo resuelve pero suponiendo que todos los embaldosados son periódicos (falso)

Y otro más

El problema de correspondencia de Post

Dadas dos listas de palabras $x_1, x_2, \dots, x_k$

$y_1, y_2, \dots, y_k$

¿existen a1, a2, ..., an para los cuales

$x_{a1}x_{a2}\dots x_{an} = y_{a1}y_{a2}\dots y_{an}$?

El problema de Post

Ejemplo: u_1=*aba* u_2= *bbb* u_3=*aab* u_4=*bb*,

v_1=*a* v_2=*aaa* v_3=*abab* v_4=*babba*

Datos:

aba	bbb	aab	bb
a	aaa	abab	babba

aba	bb	aab	aba
a	babba	abab	a

El problema de Post

Ejemplo:

Datos:

abb	bb	abb
a	aaa	abab

Respuesta: No

El problema de Post

Ejemplo:

Datos:

I	IPP	IS	M	S
PPI	I	I	M	SS

M	IS	S	IS	S	IPP	I
M	I	SS	I	SS	I	PPI

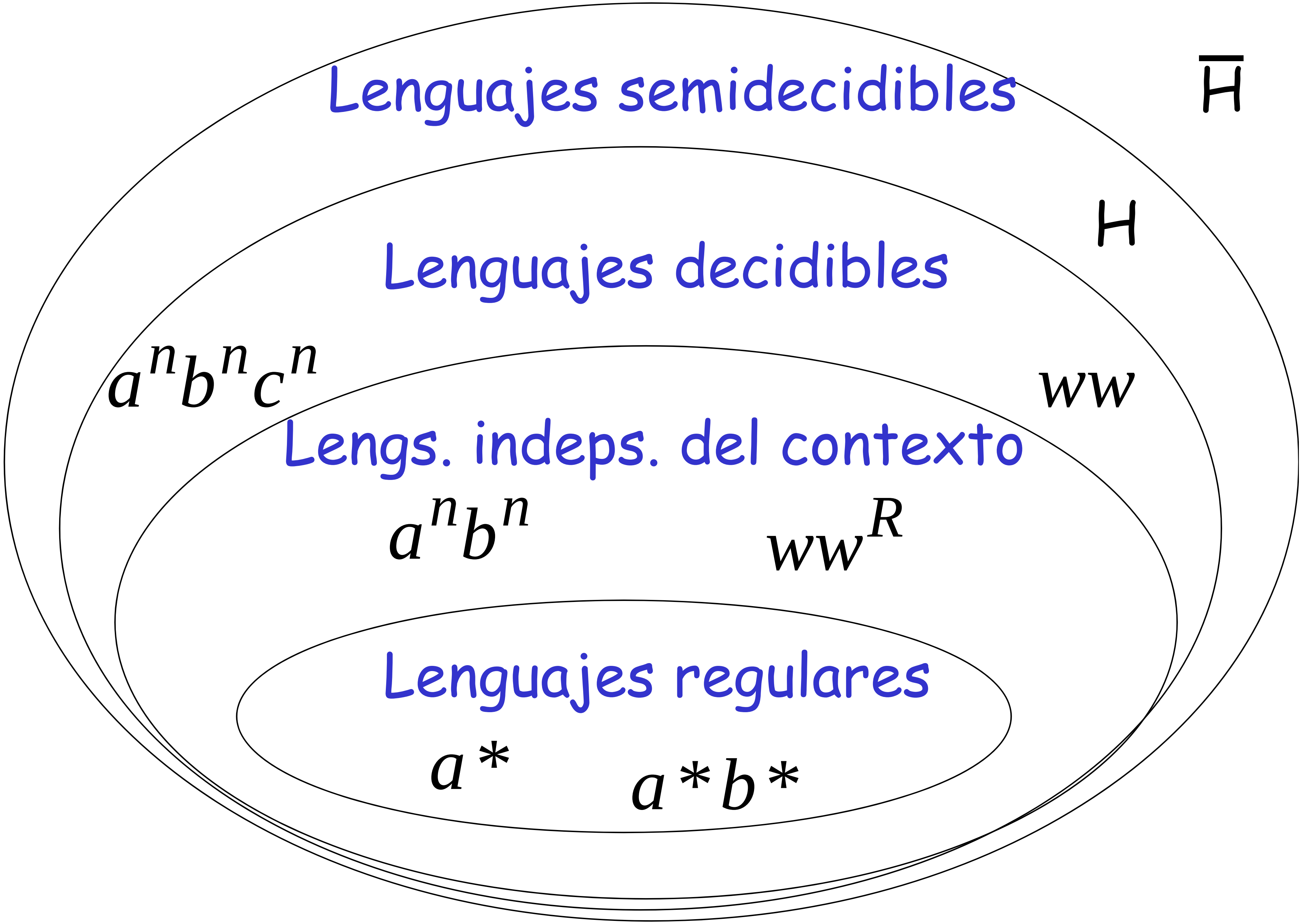
Uno de matemáticas

El décimo problema de Hilbert

Dada una ecuación con coeficientes enteros, ¿existe una solución entera?

Ejemplos: $x^2+y^2=13$

$2x-11=0$



Lenguajes semidecidibles
$\overline{H}$
H
Lenguajes decidibles
$a^n b^n c^n$
ww
Lengs. indeps. del contexto
$a^n b^n$
ww^R
Lenguajes regulares
a^*
$a^* b^*$

Referencias (para este tema y el anterior)

- Sipser, capítulos 3 y 4
- Kelley, capítulos 4, 5 y 6