# Problemas sobre conjuntos y lenguajes

Jorge Bernad, Elvira Mayordomo, Universidad de Zaragoza

20 de septiembre de 2013

**1.** ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son ciertas?

1. Los perros tienen alas sólo si los gatos tienen alas.
2. Los pájaros tienen alas sólo si los gatos tienen alas.
3. Si los gatos tienen alas, entonces los pájaros tienen alas.
4. Las serpientes tienen piernas si y sólo si los hamsters tienen piernas.
5. Si las ranas tienen pelo y los ratones tienen ojos, entonces los tiburones no tienen dientes.

**2.** Decir si cada una de las siguientes afirmaciones es cierta.

1. $\emptyset \subseteq \emptyset$
2. $\emptyset \in \emptyset$
3. $\epsilon \in \{\epsilon\}$
4. $\emptyset \subseteq \{\epsilon\}$

**3.** Demostrar cada una de las siguientes afirmaciones para $A, B, C$ tres conjuntos cualesquiera.

1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (A \cup B) = A$
3. $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$

**4.** Dados $\Sigma = \{a, b, c\}$, $A = \{ab, bc, ab, bb\}$, $B = \{\epsilon\}$, $C = \emptyset$, $D = \{bb, aabc, c, cc\}$.

1. ¿Cuántas cadenas tiene el lenguaje $C$? ¿Y el $B$?
2. Calcular $(A \cdot D) \cup (\Sigma \cdot C)$.
3. Calcular $\Sigma^n$.
4. Calcular $A^* \cap D^*$.
5. Calcular $(A \cup D)^*$.
6. Calcular $D^* - A^*$.

**5.** Demostrar usando inducción que dado un alfabeto $\Sigma$ y un $n \in \mathbb{N}$,

$$|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$$

**6.** ¿Para qué lenguajes $L$ se cumple que $\epsilon \in L^+$? Justificarlo.

**7.** Dados $A = \{w \mid w \text{ empieza en } a\}$, $B = \{w \mid w \text{ termina en } b\}$, demostrar quién es $A \cdot B$.

**8.** Dados dos cadenas $u$ y $v$, demostrar que $(uv)^R = v^R u^R$. Dados dos lenguajes $A$ y $B$, demostrar que $(AB)^R = B^R A^R$.

# 1. Conjuntos contables

*Definición 1.1* Un conjunto $A$ es *contable* si existe una función inyectiva $f : A \to \mathbb{N}$.

Intuitivamente, un conjunto contable se puede contar ya que corresponde a un subconjunto de los naturales.

Una primera propiedad básica es que se puede demostrar que un conjunto es contable a partir de otro contable.

**9.** Demostrar que si $B$ es contable y existe una función inyectiva $g : A \to B$ entonces $A$ es contable.

**10.** Demostrar que, dado $\Sigma$ un alfabeto, $\Sigma^*$ es contable.

En informática nos interesa especialmente "codificar" conjuntos, es decir, representar cada elemento como una cadena. Veamos que todo conjunto que se puede codificar es contable.

**11.** Demostrar que si existe una función inyectiva $g : A \to \Sigma^*$ entonces $A$ es contable.

Más adelante veremos algún ejemplo de conjunto no contable (por ejemplo los reales). ¿Se te ocurre alguna forma de codificar TODOS los números reales?