Lenguajes independientes de contexto o incontextuales

Elvira Mayordomo

Universidad de Zaragoza

5 de noviembre de 2012

Contenido de este tema

- Introducción a las gramáticas
- Definiciones
- Lenguajes incontextuales
- Lenguajes incontextuales y lenguajes regulares, las gramáticas regulares

Introducción a las gramáticas: ejemplo

Ejemplo de gramática

- Se trata de generar palabras sobre un alfabeto aplicando reglas de sustitución
- Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, generamos palabras empezando con S y aplicando las reglas de sustitución:

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow aSb \\
S &\rightarrow ab
\end{aligned}
$$

- $S \rightarrow aSb$ significa "sustituye S por aSb"
- $S \rightarrow ab$ significa "sustituye S por ab"

Generando una palabra

- Empezamos con S (de "start")
- Aplicamos $S \rightarrow aSb$, es decir, sustituímos S por aSb:

$$S \Rightarrow aSb$$

- Ahora en aSb aplicamos la regla $S \rightarrow aSb$:

$$aSb \Rightarrow aaSbb$$

- Ahora en $aaSbb$ aplicamos la regla $S \rightarrow ab$:

$$aaSbb \Rightarrow aaabbb$$

- Ya hemos generado la palabra $aaabbb$

Generando otra palabra

- Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, generamos palabras empezando con S y aplicando las reglas de sustitución:

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \\ S &\rightarrow ab \end{aligned}$$

- Empezamos con S (de "start")
- Aplicamos la primera regla: $S \Rightarrow aSb$
- Aplicamos la primera regla: $aSb \Rightarrow aaSbb$
- Aplicamos la primera regla: $aaSbb \Rightarrow aaaSbbb$
- Aplicamos la segunda regla: $aaaSbbb \Rightarrow aaaabbbb$
- Ya hemos generado la palabra $aaaabbbb$
- ¿Qué palabras podemos generar?
  Las del lenguaje $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Segundo ejemplo de gramática

- Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, reglas de sustitución:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \\ S & \rightarrow & \epsilon \\ A & \rightarrow & aSA \\ A & \rightarrow & a \\ B & \rightarrow & bb \end{array}$$

- La abreviamos así:

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & AB \,|\, \epsilon \\ A & \rightarrow & aSA \,|\, a \\ B & \rightarrow & bb \end{array}$$

Segundo ejemplo de gramática

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AB \mid \epsilon \\
A &\rightarrow aSA \mid a \\
B &\rightarrow bb
\end{aligned}
$$

- Aplicamos la regla $S \rightarrow AB$: $S \Rightarrow AB$
- Aplicamos la regla $B \rightarrow bb$:

$$AB \Rightarrow Abb$$

- Aplicamos la regla $A \rightarrow a$:

$$Abb \Rightarrow abb$$

- Hemos generado la palabra abb

Segundo ejemplo de gramática

$$\begin{array}{rcl} S & \rightarrow & AB \mid \epsilon \\ A & \rightarrow & aSA \mid a \\ B & \rightarrow & bb \end{array}$$

- Empezamos con S (de "start")
- Aplicamos la regla $S \rightarrow \epsilon$:

$$S \Rightarrow \epsilon$$

- Hemos generado la palabra ϵ

Elementos de una gramática

Una **gramática incontextual** es:

$$G = (N, \Sigma, S, P)$$

- N: Variables o No Terminales, S, A, B (se suelen usar mayúsculas)
- Σ Alfabeto de Entrada o Terminales
- $S \in N$: No Terminal o Variable Inicial
- $P \subseteq N \times (N \cup \Sigma \cup \{\epsilon\})^*$: Producciones o Reglas de Sustitución

Derivación

- Decimos que $\alpha \Rightarrow^* \beta$ cuando podemos obtener β de α a base de sustituciones, es decir

$$\alpha \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 \Rightarrow \ldots \alpha_n \Rightarrow \beta$$

- Por ejemplo (en nuestro primer ejemplo de gramática):

$$aSb \Rightarrow^* aaaaSbbbb$$

porque

$$aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaaaSbbbb$$

- Cuando $\alpha \Rightarrow^* \beta$ decimos que hay una derivación de α a β

Lenguaje generado por una gramática

- **Definición** Una gramática G genera $w \in \Sigma^*$ cuando

$$S \Rightarrow^* w$$

- **Definición** El lenguaje generado por una gramática G es

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

Más ejemplos de gramáticas

$G = (N = \{S, A, B\}, \Sigma = \{0, 1, 2\}, S, P)$, con P formado por

$$\begin{array}{lcl} S & \to & AB \\ A & \to & 0A1 \mid \epsilon \\ B & \to & 0B2 \mid \epsilon \end{array}$$

Recordad, $A \to 0A1 \mid \epsilon$ abrevia

$$\begin{array}{lcl} A & \to & 0A1 \\ A & \to & \epsilon \end{array}$$

- ¿Qué lenguaje genera G?
- Palabras que genera: ???
- Genera el lenguaje: $L(G) = \{0^n 1^n 0^m 2^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Más ejemplos de gramáticas

$G = (N = \{S, A, B\}, \Sigma = \{0, 1\}, S, P)$, con P formado por

$$\begin{array}{rcl} S & \to & A \,|\, B \\ A & \to & 0A1 \,|\, 0 \\ B & \to & 0B1 \,|\, 1 \end{array}$$

- ¿Qué lenguaje genera G?
- Palabras que genera: ???
- Genera el lenguaje:

$$L(G) = \left\{0^{n+1}1^n \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{0^n 1^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

Más ejemplos de gramáticas

$G = (N = \{S\}, \Sigma = \{(,)\}, S, P)$, con P formado por

$$S \rightarrow (S) \,|\, SS \,|\, \epsilon$$

- ¿Qué lenguaje genera G?
- Palabras que genera: ???
- Genera el lenguaje:

$$L(G) = \{w \in \{(,)\}^* \mid w \text{ es una serie de paréntesis bien anidados}\}$$

¿Qué lenguajes genera una gramática?

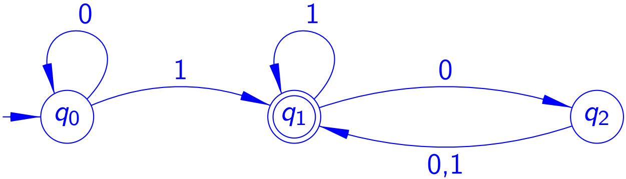
- Hemos visto que la gramática para un lenguaje tiene que ver con tener una definición recursiva del lenguaje
- Buscad una gramática que genere $\left\{0^n 1^{2n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$
- Buscad una gramática que genere $\{0^n 1^m 0^{n+m} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- La dificultad está en encontrar una definición recursiva
  - Reto: Encontrad una gramática que genere $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
- Veremos alternativas a las gramáticas

Lenguajes incontextuales

- Un lenguaje A es incontextual (también llamado independiente de contexto o LIC) si existe una gramática G tal que $A = L(G)$
- ¿Qué lenguajes son incontextuales? ¿Los mismos que los regulares?
- Hemos visto que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un lenguaje incontextual (existe una gramática que lo genera)
- Vimos hace unos días que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es un lenguaje regular (usando el lema de bombeo)
- Así que regular no es lo mismo que incontextual
- ¿Son todos los regulares incontextuales?

¿Son todos los regulares incontextuales?

Cómo convertir un autómata (AFD ó AFnD) en una gramática

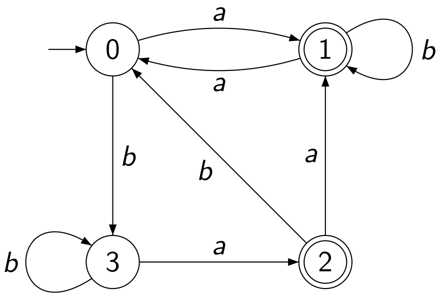


- Un no terminal por cada estado: Q_0, Q_1, Q_2 ($S = Q_0$)
- Una regla por cada símbolo y por cada estado

$$
\begin{array}{rcl}
Q_0 & \rightarrow & 0Q_0 \,|\, 1Q_1 \\
Q_1 & \rightarrow & 0Q_2 \,|\, 1Q_1 \,|\, \epsilon \\
Q_2 & \rightarrow & 0Q_1 \,|\, 1Q_1
\end{array}
$$

- Los estados finales generan ϵ
- La gramática y el autómata generan/aceptan el mismo lenguaje

Cómo convertir un autómata (AFD ó AFnD) en una gramática



- $S = Q_0$

$$
\begin{array}{rcl}
Q_0 & \rightarrow & aQ_1 \mid bQ_3 \\
Q_1 & \rightarrow & aQ_0 \mid bQ_1 \mid \epsilon \\
Q_2 & \rightarrow & aQ_1 \mid bQ_0 \mid \epsilon \\
Q_3 & \rightarrow & aQ_2 \mid bQ_3
\end{array}
$$

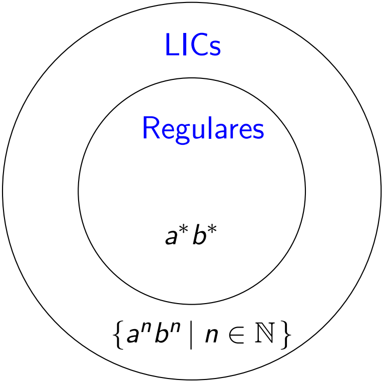
Todos los regulares son incontextuales

- Así podemos convertir cada AFD ó AFnD en una gramática incontextual
- Por tanto todos los lenguajes regulares son incontextuales
- Además todas las gramáticas que resultan tienen sólo reglas de dos formas:
  - $A \to aB$, es decir,

    $$\text{No-Terminal} \to \ \text{Terminal No-Terminal}$$

  - $A \to \epsilon$, es decir, No-Terminal$\to \epsilon$
- Las gramáticas que sólo tienen reglas de estas dos formas se llaman Gramáticas Regulares
- Las gramáticas regulares generan exactamente los lenguajes regulares

Todos los regulares son incontextuales



LICs = Lenguajes incontextuales

Pero hay incontextuales no regulares

Bibliografía

- Sipser (2a edición), sección 2.1.
- Kelley, secciones 3.1 a 3.3.