

Lenguajes independientes de contexto o incontextuales

Elvira Mayordomo

Universidad de Zaragoza

5 de noviembre de 2012

Contenido de este tema

- Introducción a las gramáticas
- Definiciones
- Lenguajes incontextuales
- Lenguajes incontextuales y lenguajes regulares, las gramáticas regulares

Ejemplo de gramática

- Se trata de **generar** palabras sobre un alfabeto aplicando reglas de sustitución
- Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, generamos palabras empezando con S y aplicando las **reglas de sustitución**:

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow ab$$

- $S \rightarrow aSb$ significa “sustituye S por aSb ”
- $S \rightarrow ab$ significa “sustituye S por ab ”

Generando una palabra

- Empezamos con S (de “start”)
- Aplicamos $S \rightarrow aSb$, es decir, sustituimos S por aSb :

$$S \Rightarrow aSb$$

- Ahora en aSb aplicamos la regla $S \rightarrow aSb$:

$$aSb \Rightarrow aaSbb$$

- Ahora en $aaSbb$ aplicamos la regla $S \rightarrow ab$:

$$aaSbb \Rightarrow aaabbbb$$

- Ya hemos generado la palabra $aaabbbb$

Generando otra palabra

- Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, generamos palabras empezando con S y aplicando las reglas de sustitución:

$$S \rightarrow aSb$$

$$S \rightarrow ab$$

- Empezamos con S (de "start")
- Aplicamos la primera regla: $S \Rightarrow aSb$
- Aplicamos la primera regla: $aSb \Rightarrow aaSbb$
- Aplicamos la primera regla: $aaSbb \Rightarrow aaaSbbb$
- Aplicamos la segunda regla: $aaaSbbb \Rightarrow aaaabbbb$
- Ya hemos generado la palabra $aaaabbbb$
- ¿Qué palabras podemos generar?
Las del lenguaje $\{a^n b^n \mid n \geq 1\}$

Segundo ejemplo de gramática

- Alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$, reglas de sustitución:

$$S \rightarrow AB$$

$$S \rightarrow \epsilon$$

$$A \rightarrow aSA$$

$$A \rightarrow a$$

$$B \rightarrow bb$$

- La abreviamos así:

$$S \rightarrow AB \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow aSA \mid a$$

$$B \rightarrow bb$$

Segundo ejemplo de gramática

$$S \rightarrow AB \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow aSA \mid a$$

$$B \rightarrow bb$$

- Aplicamos la regla $S \rightarrow AB$: $S \Rightarrow AB$
- Aplicamos la regla $B \rightarrow bb$:

$$AB \Rightarrow Abb$$

- Aplicamos la regla $A \rightarrow a$:

$$Abb \Rightarrow abb$$

- Hemos generado la palabra abb

Segundo ejemplo de gramática

$$S \rightarrow AB \mid \epsilon$$

$$A \rightarrow aSA \mid a$$

$$B \rightarrow bb$$

- Empezamos con S (de “start”)
- Aplicamos la regla $S \rightarrow \epsilon$:

$$S \Rightarrow \epsilon$$

- Hemos generado la palabra ϵ

Una **gramática incontextual** es:

$$G = (N, \Sigma, S, P)$$

- N : **Variables** o **No Terminales**, S, A, B (se suelen usar mayúsculas)
- Σ **Alfabeto de Entrada** o **Terminales**
- $S \in N$: **No Terminal** o **Variable Inicial**
- $P \subseteq N \times (N \cup \Sigma \cup \{\epsilon\})^*$: **Producciones** o **Reglas de Sustitución**

- Decimos que $\alpha \Rightarrow^* \beta$ cuando podemos obtener β de α a base de sustituciones, es decir

$$\alpha \Rightarrow \alpha_2 \Rightarrow \alpha_3 \Rightarrow \dots \alpha_n \Rightarrow \beta$$

- Por ejemplo (en nuestro primer ejemplo de gramática):

$$aSb \Rightarrow^* aaaaSbbbb$$

porque

$$aSb \Rightarrow aaSbb \Rightarrow aaaSbbb \Rightarrow aaaaSbbbb$$

- Cuando $\alpha \Rightarrow^* \beta$ decimos que hay una **derivación** de α a β

- **Definición** Una gramática G **genera** $w \in \Sigma^*$ cuando

$$S \Rightarrow^* w$$

- **Definición** El **lenguaje generado** por una gramática G es

$$L(G) = \{w \in \Sigma^* \mid S \Rightarrow^* w\}$$

Más ejemplos de gramáticas

$G = (N = \{S, A, B\}, \Sigma = \{0, 1, 2\}, S, P)$, con P formado por

$$S \rightarrow AB$$

$$A \rightarrow 0A1 \mid \epsilon$$

$$B \rightarrow 0B2 \mid \epsilon$$

Recordad, $A \rightarrow 0A1 \mid \epsilon$ abrevia

$$A \rightarrow 0A1$$

$$A \rightarrow \epsilon$$

- ¿Qué lenguaje genera G ?
- Palabras que genera: ???
- Genera el lenguaje: $L(G) = \{0^n 1^n 0^m 2^m \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Más ejemplos de gramáticas

$G = (N = \{S, A, B\}, \Sigma = \{0, 1\}, S, P)$, con P formado por

$$S \rightarrow A|B$$

$$A \rightarrow 0A1|0$$

$$B \rightarrow 0B1|1$$

- ¿Qué lenguaje genera G ?
- Palabras que genera: ???
- Genera el lenguaje:

$$L(G) = \{0^{n+1}1^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{0^n1^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Más ejemplos de gramáticas

$G = (N = \{S\}, \Sigma = \{(,)\}, S, P)$, con P formado por

$$S \rightarrow (S) \mid SS \mid \epsilon$$

- ¿Qué lenguaje genera G ?
- Palabras que genera: ???
- Genera el lenguaje:

$$L(G) = \{w \in \{(,)\}^* \mid w \text{ es una serie de paréntesis bien anidados}\}$$

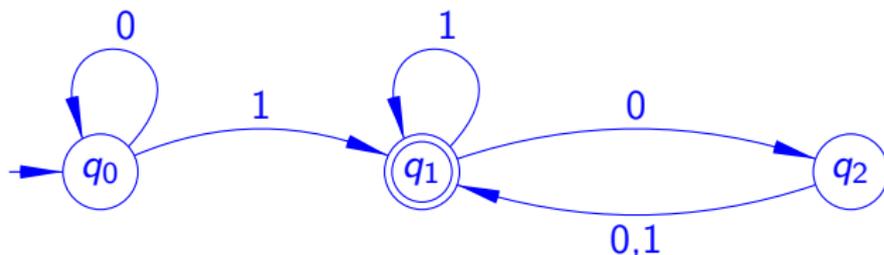
¿Qué lenguajes genera una gramática?

- Hemos visto que la gramática para un lenguaje tiene que ver con tener una **definición recursiva** del lenguaje
- Buscad una gramática que genere $\{0^n 1^{2^n} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- Buscad una gramática que genere $\{0^n 1^m 0^{n+m} \mid n \in \mathbb{N}\}$
- La dificultad está en encontrar una definición recursiva
 - ▶ **Reto:** Encontrad una gramática que genere $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$
- Veremos alternativas a las gramáticas

- Un lenguaje A es **incontextual** (también llamado **independiente de contexto o LIC**) si existe una gramática G tal que $A = L(G)$
- ¿Qué lenguajes son incontextuales? ¿Los mismos que los regulares?
- Hemos visto que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ es un lenguaje incontextual (existe una gramática que lo genera)
- Vimos hace unos días que $\{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ no es un lenguaje regular (usando el lema de bombeo)
- Así que **regular no es lo mismo que incontextual**
- ¿Son todos los regulares incontextuales?

¿Son todos los regulares incontextuales?

Cómo convertir un autómata (AFD ó AFnD sin ϵ -transiciones) en una gramática



- Un no terminal por cada estado: Q_0, Q_1, Q_2 ($S = Q_0$)
- Una regla por cada símbolo y por cada estado

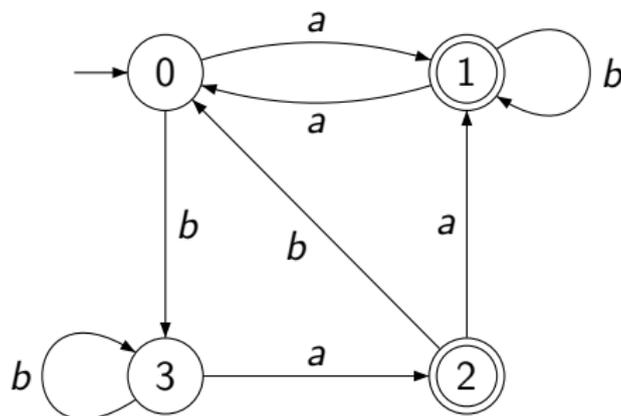
$$Q_0 \rightarrow 0Q_0 \mid 1Q_1$$

$$Q_1 \rightarrow 0Q_2 \mid 1Q_1 \mid \epsilon$$

$$Q_2 \rightarrow 0Q_1 \mid 1Q_1$$

- Los estados finales generan ϵ
- La gramática y el autómata generan/aceptan el mismo lenguaje

Cómo convertir un autómata (AFD ó AFnD sin ϵ -transiciones) en una gramática



- $S = Q_0$

$$Q_0 \rightarrow aQ_1 \mid bQ_3$$

$$Q_1 \rightarrow aQ_0 \mid bQ_1 \mid \epsilon$$

$$Q_2 \rightarrow aQ_1 \mid bQ_0 \mid \epsilon$$

Todos los regulares son incontextuales

- Así podemos convertir cada AFD ó AFnD (sin ϵ -transiciones) en una gramática incontextual
- Por tanto **todos los lenguajes regulares son incontextuales**
- Además todas las gramáticas que resultan tienen sólo reglas de dos formas:

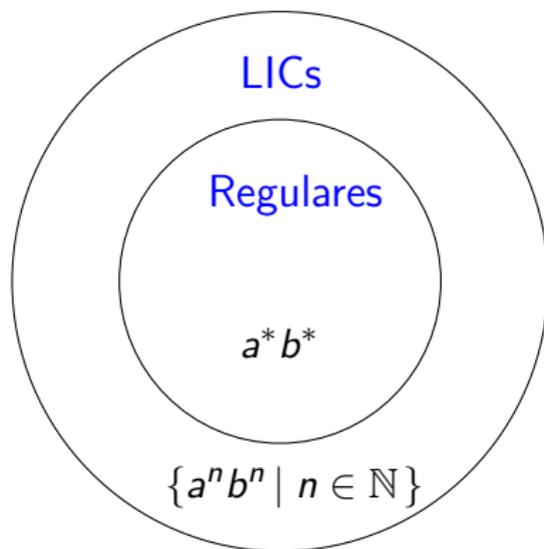
▶ $A \rightarrow aB$, es decir,

No-Terminal \rightarrow Terminal No-Terminal

▶ $A \rightarrow \epsilon$, es decir, **No-Terminal $\rightarrow \epsilon$**

- Las gramáticas que sólo tienen reglas de estas dos formas se llaman **Gramáticas Regulares**
- **Las gramáticas regulares generan exactamente los lenguajes regulares**

Todos los regulares son incontextuales



LICs = Lenguajes incontextuales

Pero hay incontextuales no regulares

- Sipser (2a edición), sección 2.1.
- Kelley, secciones 3.1 a 3.3.