Evaluación de prestaciones de sistemas concurrentes modelados con redes de Petri

Javier Campos
Dpto. Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad de Zaragoza

XI Escuela de Verano de Informática
11-13 de Julio de 2001, Albacete

El plan para esta hora

- Introducción
  - Procesos estocásticos
  - La distribución exponencial
  - Cadenas de Markov (MC)
- Redes de Petri estocásticas (SPN)
  - Isomorfismo entre SPN y MC
  - Indices de prestaciones
- Redes de Petri estocásticas generalizadas (GSPN)
  - Transiciones inmediatas y prioridad
  - Definición de GSPN
  - Conflictos extendidos
  - Isomorfismo entre GSPN y MC
  - Un ejemplo sencillo
  - Herramientas

Observaciones preliminares

- Las redes de Petri temporizadas con disparo atómico en las que todos los tiempos de servicio de las transiciones son *variables aleatorias* con distribuciones exponenciales negativas se llaman redes de Petri estocásticas (SPN)

- El comportamiento dinámico de una SPN se describe mediante un *proceso estocástico*

Definiciones

- Una *variable aleatoria* es una función real definida sobre un espacio de probabilidad

- Un *proceso estocástico* es un modelo matemático útil para describir fenómenos de naturaleza probabilista como una función de un parámetro que usualmente se interpreta como *tiempo*

- Un proceso estocástico $\{X(t), t \in T\}$ es una familia de variables aleatorias definidas sobre un mismo espacio de probabilidad, indexada por el parámetro t y tomando valores en el espacio de estados S

Procesos estocásticos

- La descripción probabilista de una variable aleatoria X viene dada por su *función de densidad de probabilidad* (pdf)

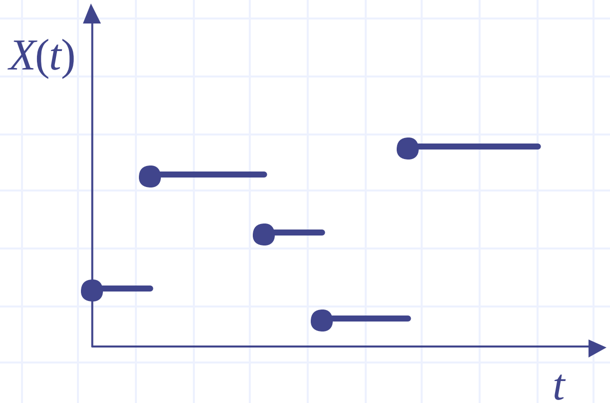
$$f_X(x) = \frac{d}{dx} P\{X \leq x\}, \quad -\infty < x < \infty$$

- La descripción probabilista de un proceso estocástico viene dada por la pdf conjunta de cualquier conjunto de variables aleatorias seleccionadas del proceso

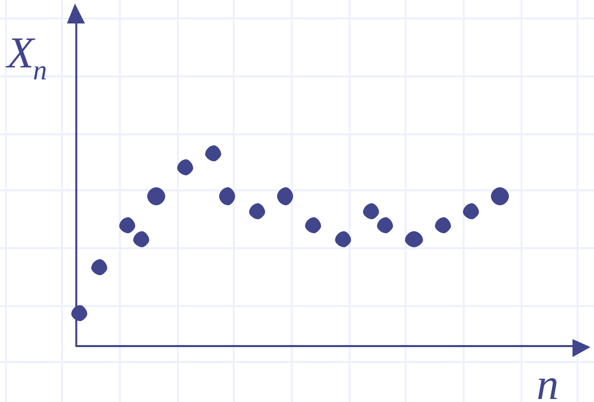
- En el caso general, la descripción probabilista completa de un proceso estocástico no es factible

Procesos estocásticos

- Una realización (o camino de muestra) de un proceso estocástico es una función del tiempo



tiempo continuo



tiempo discreto

Cadenas de Markov

- Se llama proceso markoviano a uno que satisface la propiedad de Markov:

$$P\{X(t) \le x \mid X(t_n) = x_n, X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0\} =$$
$$= P\{X(t) \le x \mid X(t_n) = x_n\}$$
$$\text{con } t > t_n > t_{n-1} > \cdots > t_0$$

- Si el espacio de estados es numerable, el proceso se llama *cadena de Markov*
- Si el parámetro t es continuo, el proceso se llama cadena de Markov *en tiempo continuo* (CTMC)

Cadenas de Markov

- Una cadena de Markov en tiempo continuo (CTMC) es un proceso estocástico en el que:
  - Los tiempos de estancia en los estados son variables aleatorias exponencialmente distribuidas
  - La evolución futura depende sólo del estado actual y no de la historia pasada

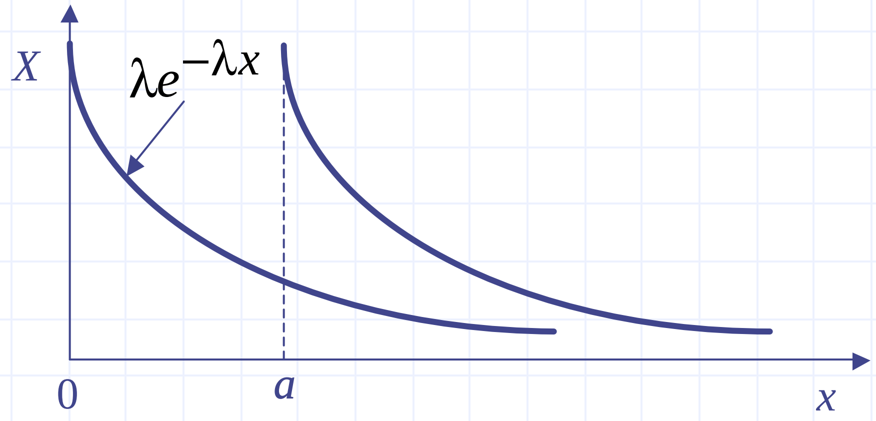
Distribución exponencial

- La distribución (pdf) exponencial

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

es la única pdf continua para la que se cumple la propiedad de la *desmemoria*

$$P\{X \geq x + a \mid X \geq a\} = P\{X \geq x\}$$



Distribución exponencial

- La pdf exponencial

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

se define únicamente por su *tasa* λ, que es la inversa de su media:

$$E[X] = \frac{1}{\lambda}$$

Distribución exponencial

- Dadas dos variables aleatorias X e Y con pdf exponencial

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0)$$

$$f_Y(y) = \mu e^{-\mu y} \quad (y \geq 0)$$

la nueva variable aleatoria

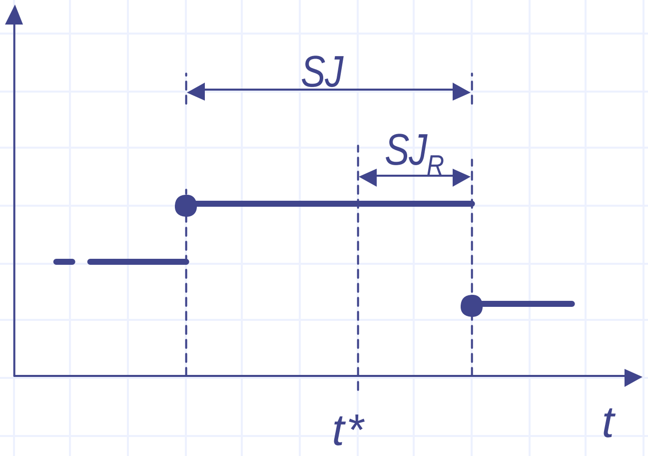
$$Z = \text{mín}\{X, Y\}$$

también tiene distribución exponencial

$$f_Z(z) = (\lambda + \mu) e^{-(\lambda+\mu) z} \quad (z \geq 0)$$

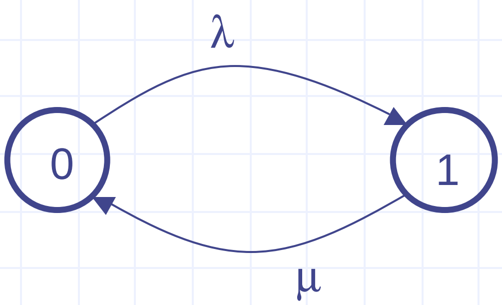
Cadenas de Markov

- El tiempo de estancia residual en un estado en una cadena de Markov es una variable aleatoria con la misma distribución que el tiempo de estancia completo (desmemoria...)



Cadenas de Markov

- Una CTMC puede describirse mediante un *diagrama de tasas de transición entre estados* o equivalentemente una *matriz de tasas de transición entre estados*, también llamada *generador infinitesimal*, y denotada por *Q*



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}$$

Cadenas de Markov

- La solución de una CTMC en el instante t es la distribución de probabilidad sobre el conjunto de estados:

$$\pi(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t), \pi_3(t), \ldots)$$

con $\pi_i(t) = P\{X(t) = i\}$

calculado a partir de la ecuación

$$\pi(t) = \pi(0)H(t), \text{ con } H(t) = e^{Qt}$$

- Esta es una solución elegante, pero muy costosa de resolver…

Cadenas de Markov

- La solución de una CTMC en estado estacionario, que sólo existe para CTMC *ergódicas*, es también una distribución sobre el espacio de estados:

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3, \ldots)$$

con

$$\pi_i = \lim_{t \to \infty} P\{X(t) = i\}$$

y se calcula como la solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\pi Q = 0$$

con la condición de normalización

$$\sum_i \pi_i = 1$$

Redes de Petri estocásticas (SPN)

- Formalmente, una SPN es una 7-tupla:

$$SPN = (P, T, I(\cdot), O(\cdot), H(\cdot), w(\cdot), m_0)$$

donde:

- $PN = (P, T, I(\cdot), O(\cdot), H(\cdot), m_0)$ es la red de Petri marcada subyacente a la SPN
- $w(\cdot)$ es una función definida sobre el conjunto de las transiciones que asocia una tasa a cada transición. Esa tasa es la inversa del tiempo medio de servicio de la transición

Redes de Petri estocásticas (SPN)

- Puede demostrarse que las SPN son isomorfas a las CTMC:
  - el grafo de alcanzabilidad de la SPN corresponde al diagrama de tasas de transición entre estados de la MC

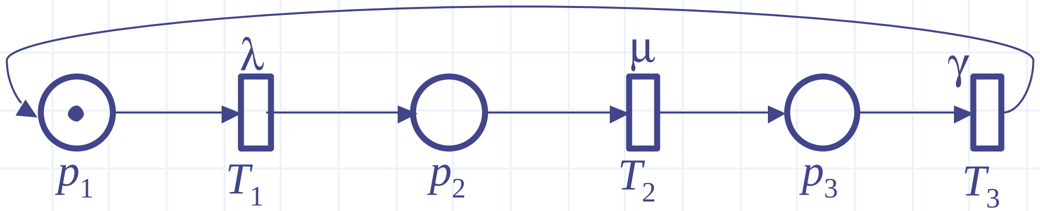
- Este hecho puede demostrarse fácilmente para subclases sencillas de PN, como las *máquinas de estados* o los *grafos marcados*

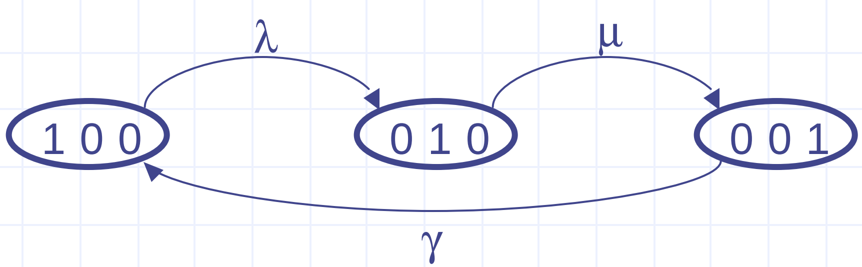
SPN sin conflictos ni sincronizaciones

- Caso muy particular:
  - La red tiene estructura tanto de máquina de estados finita (ninguna transición tiene más de un lugar de entrada ni de salida) como de grafo marcado (ningún lugar tiene más de una transición de entrada ni de salida)
  - El marcado inicial contiene una sola marca
- Cada lugar de la red identifica un estado de la red marcada
- Cada lugar de la red se corresponde con un estado del modelo probabilista correspondiente
- El tiempo de estancia de la marca en cada lugar está completamente determinado por las características de la única transición que puede eliminarlo del lugar

SPN sin conflictos ni sincronizaciones

- El modelo probabilista que representa el comportamiento de la red (*proceso de marcado*) es una CTMC





SPN con conflictos

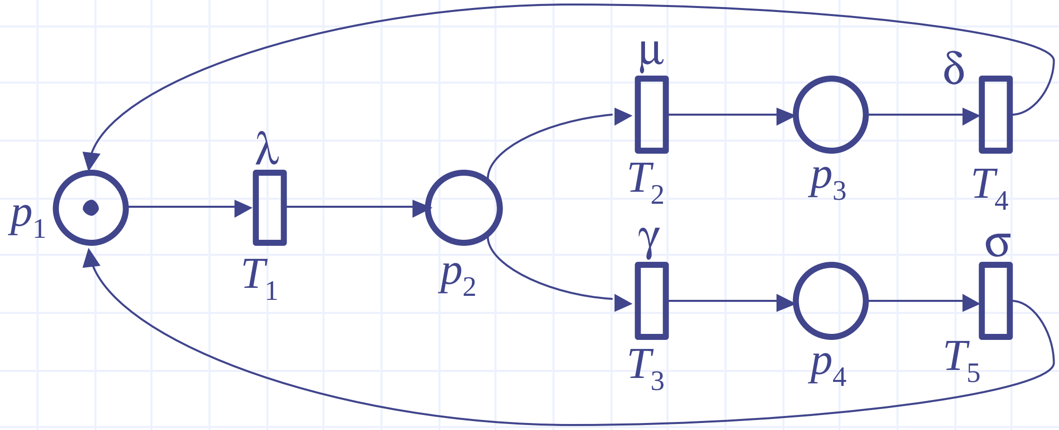
- Un caso un poco más general:
  - La red tiene estructura de máquina de estados finita (ninguna transición tiene más de un lugar de entrada ni de salida)
  - El marcado inicial tiene una sola marca
- Aparecen conflictos cuando varias transiciones comparten un lugar de entrada
- Comienza una carrera entre las transiciones sensibilizadas simultaneamente
- La carrera la gana una de las transiciones; en general, se debe decidir qué se hace con el trabajo parcialmente realizado por el resto de las transiciones y que ha sido interrumpido por el disparo de la ganadora...

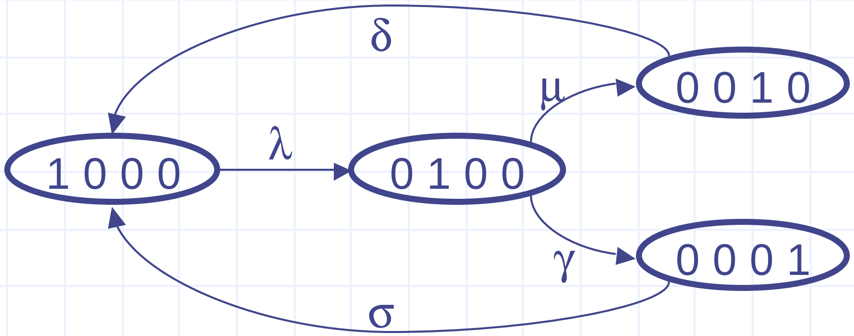
SPN con conflictos

- Si los tiempos de servicio de las transiciones están distribuidos exponencialmente, entonces, la propiedad de la desmemoria hace indistinguibles las políticas de
  - remuestreo (recomenzar el trabajo la próxima vez que la transición se sensibilice),
  - memoria de sensibilización (al disparar otra transición, si la que no ha ganado sigue sensibilizada su trabajo continúa)
  - memoria del pasado (si la transición deja de estar sensibilizada, su trabajo se guarda y en la próxima sensibilización continuará en ese punto)
- Es decir, la política sobre la continuación del trabajo interrumpido es irrelevante en el caso exponencial

SPN con conflictos

- La CTMC se obtiene de manera obvia:





SPN con conflictos y varias marcas

- Si se consideran varias marcas en el marcado inicial aparecen situaciones más complejas

- En esos casos hay que definir además:
  - La semántica de servicio adoptada cuando el lugar de entrada de una transición contiene varias marcas
  - La política de cola asumida con respecto a las marcas que residen en el lugar de entrada de una transición

SPN con conflictos y varias marcas

- Semántica de un solo servidor
  - Se asocia un tiempo de servicio cuando la transición se sensibiliza por primera vez y tras su disparo, si la transición sigue estando sensibilizada, se vuelve a generar un nuevo tiempo de servicio, y así sucesivamente
  - Las marcas participantes en la sensibilización se procesan *en serie*, y la especificación de tiempo asociada con la transición es independiente de su grado de sensibilización

SPN con conflictos y varias marcas

- Semántica de infinitos servidores
  - Cada conjunto de marcas involucradas en una sensibilización se procesan tan pronto como llegan a los lugares de entrada de la transición temporizada
  - Su tiempo de servicio se genera en ese momento y los tiempos de servicio correspondientes al resto de las marcas que están sensibilizando la misma transición continuan corriendo concurrentemente
  - Por tanto, los conjuntos de marcas que sensibilizan de manera múltiple una misma transición se procesan *en paralelo*
  - La especificación global temporal del servicio de una transición con semántica de infinitos servidores depende por tanto de su grado de sensibilización

SPN con conflictos y varias marcas

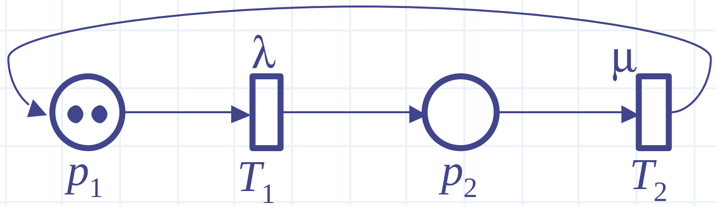
- Semántica de múltiples servidores
  - Cada conjunto de marcas involucradas en una sensibilización se procesan tan pronto como llegan a los lugares de entrada de la transición temporizada hasta alcanzar un grado máximo de paralelismo (digamos *K*)
  - Para valores del grado de sensibilización mayores que *K* los relojes asociados al servicio de las nuevas marcas sensibilizadoras se ponen en marcha sólo cuando el número de relojes activados concurrentemente desciende del valor *K*
  - La especificación global temporal del servicio de una transición con semántica de infinitos servidores depende por tanto de su grado de sensibilización hasta alcanzar un valor límite *K*

SPN con conflictos y varias marcas

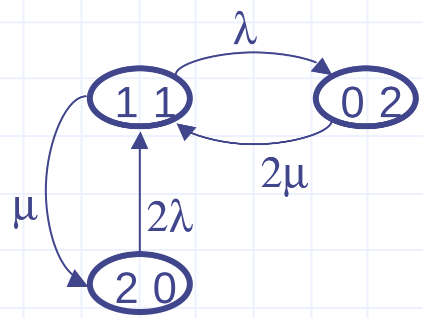
- Política de cola
  - Se puede demostrar que si los tiempos de servicio están distribuidos exponencialmente y los índices de rendimiento están relacionados sólo con los momentos del número de marcas en los lugares, se obtienen los mismos resultados para distintas políticas de cola de las marcas en los lugares
  - Por tanto, se asume la política más natural en el contexto de las PN, que es la de *orden aleatorio*, es decir, las marcas de un lugar consumidas por los disparos de su transición de salida se eligen aleatoriamente

SPN con conflictos y varias marcas

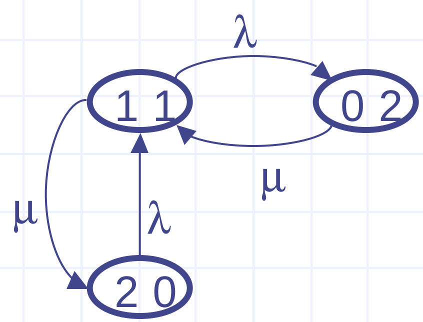
- Un ejemplo sencillo



  - Semántica de infinitos servidores en T_1 y T_2



  - Semántica de un solo servidor en T_1 y T_2



SPN: caso general (red acotada)

- La CTMC asociada a una SPN se obtiene aplicando las siguientes reglas:
  - El espacio de estados $S = \{s_i\}$ de la CTMC se corresponde con el conjunto de alcanzabilidad $RS(m_0)$ de la PN subyacente a la SPN $(m_i \leftrightarrow s_i)$
  - La tasa de transición del estado s_i (correspondiente al marcado m_i) al estado s_j (m_j) se obtiene sumando las tasas de servicio de las transiciones sensibilizadas en m_i cuyo disparo genera el marcado m_j.
- Si todas las transiciones tienen semántica de un solo servidor y tasas independientes del marcado, las componentes de Q son:

$$q_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{T_k \in e_j(m_i)} w_k, & \text{si } \; i \neq j \\ -q_i, & \text{si } \; i = j \end{cases}$$

donde $q_i = \sum\limits_{T_k \in e(m_i)} w_k$ y $e_j(m_i) = \{T_h \mid T_h \in e(m_i) \wedge m_i \xrightarrow{T_h} m_j\}$

SPN: caso general (red acotada)

- Sea $\pi(m_i,\tau)$ la probabilidad de que la SPN esté en el marcado m_i en el instante τ
- Las ecuaciones de Chapman-Kolmogorov para la CTMC asociada a la SPN son:

$$\frac{d\pi(m_i,\tau)}{d\tau} = \sum_{T_k \in T} q_{kj}\pi(m_k,\tau)$$

en notación matricial: $$\frac{dp(\tau)}{d\tau} = p(\tau)Q$$

y su solución se puede expresar formalmente: $\pi(\tau) = \pi(0)e^{Q\tau}$
donde $\pi(0)$ es la distribución inicial de probabilidad (normalmente $\pi_i(0) = 1$ si $m_i = m_0$ y $\pi_i(0) = 0$ en otro caso)

- Es una solución elegante, pero muy costosa de utilizar pues la exponenciación matricial se define con una suma infinita:

$$e^{Q\tau} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Q\tau)^k}{k!}$$

SPN: caso general (red acotada)

- La solución en estado estacionario de una SPN es la distribución de probabilidad del conjunto de marcados alcanzables

$$\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_{|RS|})$$

- Esa distribución en estado estacionario

$$\pi = \lim_{\tau \to \infty} \pi(\tau)$$

se calcula como solución del sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi Q = \mathbf{0} \\ \pi \mathbf{1}^{\mathrm{T}} = 1 \end{cases}$$

donde $\mathbf{0}$ y $\mathbf{1}^{\mathrm{T}}$ son vectores de igual tamaño que π y con todas sus componentes nulas e iguales a 1 respectivamente

Indices de prestaciones

- La distribución en estado estacionario π es la base para el análisis cuantitativo del comportamiento de la SPN, y se expresa en términos de los índices de prestaciones
- Tales índices pueden expresarse de manera general como *funciones de ganancia* definidas sobre los marcados de la SPN, y de ellas se calcula una ganancia media usando la distribución en estado estacionario
- Si $r(m)$ representa a una de esas funciones de ganancia, la ganancia media puede calcularse mediante la suma ponderada:

$$R = \sum_{m_i \in RS(m_0)} r(m_i)\pi_i$$

Indices de prestaciones

- Ejemplo genérico:
  - Calcular la probabilidad de una cierta condición $\Gamma(m)$ en la SPN
    - Primero se define la función de ganancia:

$$r(m) = \begin{cases} 1, & \text{si } \Gamma(m) = \text{verdad} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

    - Luego, la probabilidad deseada se calcula como:

$$P\{\Gamma\} = \sum_{m_i \in RS(m_0)} r(m_i)\pi_i = \sum_{m_i \in A} \pi_i$$

donde

$$A = \{m_i \in RS(m_0) \mid \Gamma(m_i) = \text{verdad}\}$$

Indices de prestaciones

- Ejemplo: valor medio del número de marcas en un lugar p_j
  - La función de ganancia es

$$r(m) = n \quad \text{si y sólo si} \quad m(p_j) = n$$

  - El valor esperado del número de marcas en p_j es:

$$\bar{\mu}(p_j) = \sum_{m_i \in RS(m_0)} r(m_i)\pi_i = \sum_{n>0} n\, P\{A(j,n)\}$$

donde $A(j,n) = \{m_i \in RS(m_0) : m_i(p_j) = n\}$ y la suma está limitada obviamente a valores $n \leq k$, si el lugar es k-limitado

Indices de prestaciones

- *Otro ejemplo: throughput* de una transición T_j (número medio de disparos por unidad de tiempo)
  - Una transición sólo puede dispararse si está sensibilizada, luego la función de ganancia es

$$r(m) = \begin{cases} w_j, & \text{si } T_j \in e(m) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

  - Por tanto, el throughput de T_j es:

$$\chi_j = \sum_{m_i \in RS(m_0)} r(m_i)\pi_i = \sum_{m_i \in A_j} w_j \pi_i$$

donde $A_j = \{m_i \in RS(m_0) : T_j \in e(m_i)\}$

Indices de prestaciones

- Ley de Little
  - El *tiempo medio de estancia*, *W*, de una marca en una subred se calcula mediante la ecuación:

$$W = \frac{L}{\lambda}$$

    donde
    - L es el número medio de marcas en la subred
    - λ es el throughput (i.e., la tasa de llegada de marcas)
  - Puede aplicarse a cada lugar, obteniéndose:

$$\overline{\mathbf{r}}[p] = \frac{\overline{\mu}[p]}{\mathbf{Pre}[p,T]\cdot\chi}$$

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- En las GSPN hay dos clases de transiciones:
  - Temporizadas, con tiempos de servicio distribuidos exponencialmente (como las SPN)
  - Inmediatas, que se disparan en tiempo cero
- El disparo de las transiciones inmediatas tiene más prioridad que el de las temporizadas
- Pueden definirse distintos valores de prioridad para el conjunto de las inmediatas

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Efecto producido por la presencia de prioridades en las propiedades de...
  - *Seguridad*: propiedades que deben cumplirse en todos los estados
    - Ejemplos: ausencia de bloqueos, limitación, exclusión mutua, ...
  - *Vivacidad*: propiedades que deben cumplirse en algunos estados
    - Ejemplos: alcanzabilidad, vivacidad, ...

El efecto es: $RS(\Sigma) \supseteq RS(\Sigma_\pi)$, y por tanto:

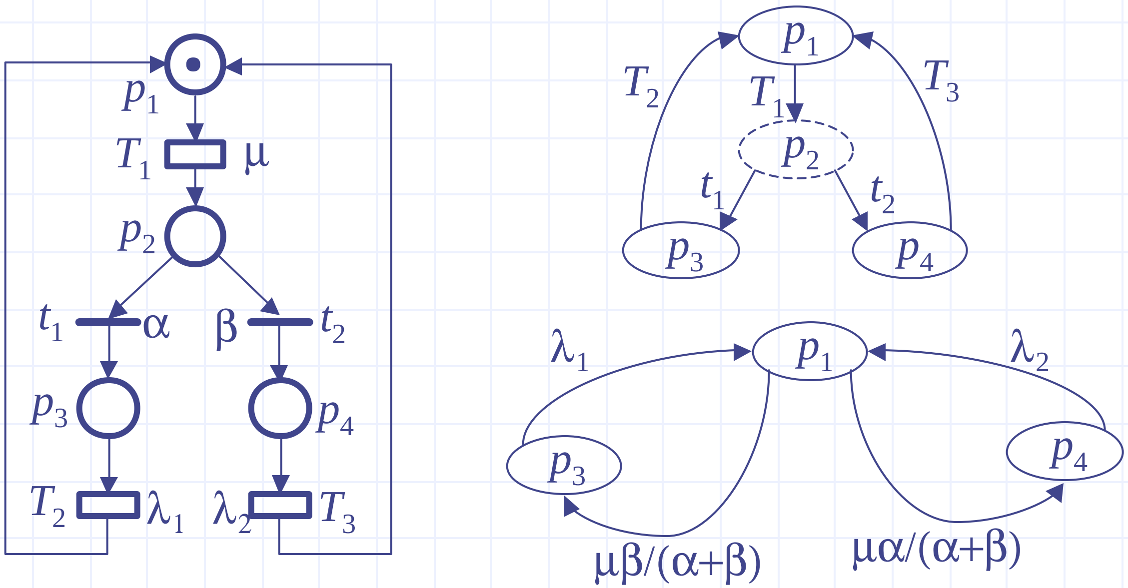
- Las propiedades de *seguridad* se mantienen
- Las propiedades de *vivacidad* pueden no mantenerse

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Efecto producido por la presencia de prioridades:
  - Alcanzabilidad: $M \in RS(\Sigma) \not\Rightarrow M \in RS(\Sigma_\pi)$
    pero $M \in RS(\Sigma_\pi) \Rightarrow M \in RS(\Sigma)$
  - Limitación: Σ limitado $\Rightarrow \Sigma_\pi$ limitado
    pero Σ no limitado $\not\Rightarrow \Sigma_\pi$ no limitado
  - Vivacidad: las prioridades pueden generar o destruir la vivacidad

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Dos tipos de marcados:
  - *Tangibles*: sensibilizan únicamente transiciones temporizadas
  - *Fugaces*: sensibilizan alguna transición inmediata



Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Formalmente una GSPN es una 8-tupla:

$$GSPN = (P, T, \Pi(\cdot), I(\cdot), O(\cdot), H(\cdot), w(\cdot), m_0)$$

donde

- $PN_\pi = (P, T, \Pi(\cdot), I(\cdot), O(\cdot), H(\cdot), m_0)$ es la PN marcada y con prioridades subyacente a la GSPN
- $w(\cdot)$ es una función definida sobre el conjunto T

Las subredes formadas por transiciones inmediatas deben ser *libres de confusión*

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- La función $w(\cdot)$ define la parte estocástica
- $w(t_k) = w_k$ es
  - la *tasa* de t_k si t_k es temporizada
  - el *peso* de t_k si t_k es inmediata

- Las tasas se usan como en las SPN
- Los pesos se usan para la resolución probabilista de conflictos entre transiciones inmediatas

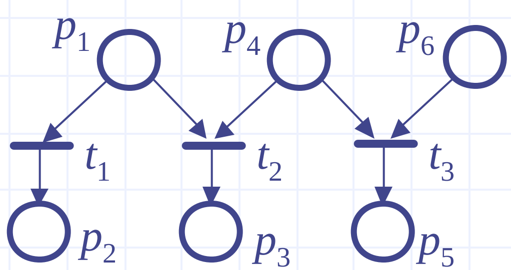
Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Al alcanzar un marcado tangible, las transiciones temporizadas que se sensibilizan por primera vez tras su último disparo seleccionan un valor aleatorio distribuido exponencialmente para su tiempo de servicio y ponen un cronómetro en marcha con ese valor
- Los cronómetros de todas las transiciones temporizadas sensibilizadas van disminuyendo a igual velocidad, hasta que uno llega al valor cero
- En ese momento, la transición cuyo cronómetro marca cero se dispara
- Las transiciones que no se disparan guardan el estado de sus cronómetros para seguir disminuyendo en el siguiente marcado en que se sensibilicen

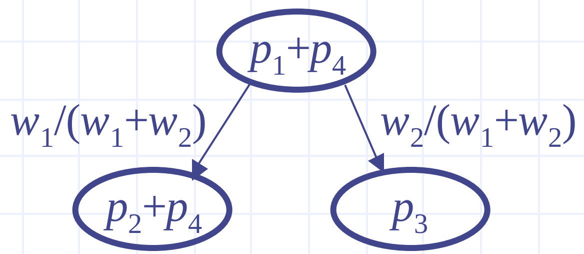
Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Al llegar a un marcado fugaz, se usan los pesos de las transiciones inmediatas sensibilizadas para seleccionar probabilística-mente la transición que se dispara
- El tiempo que se permanece en un estado fugaz es (determinísticamente) igual a cero

Redes de Petri estocásticas generalizadas



w_1=10; w_2=20; w_3=44



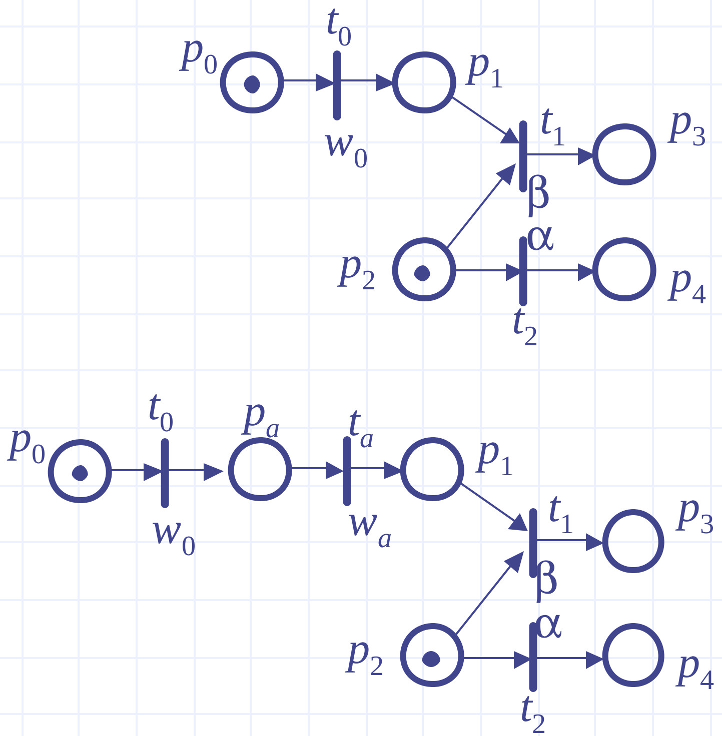
- El peso de t_2 con respecto a t_1 es siempre el mismo, independientemente de si t_3 está sensibilizada o no
- Se pueden definir extensiones con tasas/pesos dependientes de marcado

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- La definición de pesos requiere identificar conjuntos de transiciones inmediatas que pueden sensibilizarse simultáneamente en conflicto
- Esos conjuntos se llaman ECS (*extended conflict sets*)
- Cuando se conocen todos los ECS de una GSPN es fácil asociar los pesos a las transiciones, si no existe *confusión*
- El análisis de la PN con prioridades subyacente a la GSPN permite identificar los ECS y la existencia de confusión

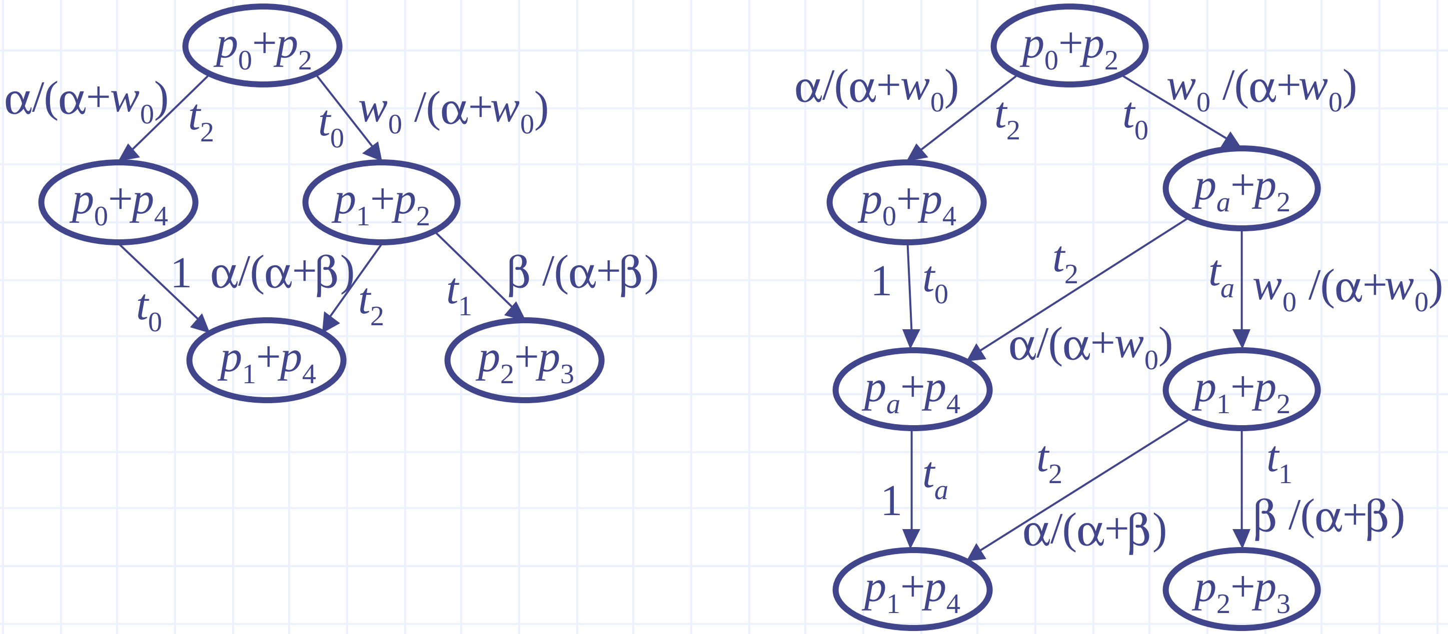
Redes de Petri estocásticas generalizadas

- En esencia, la confusión destruye la localidad de los conflictos



Redes de Petri estocásticas generalizadas

- La confusión produce distintas probabilidades de transición entre estados



Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Cuando varias transiciones (que pertenecen a un mismo ECS) se sensibilizan en un marcado una de ellas, t_i, se elige para ser disparada con probabilidad:

$$P\{t_i \mid m\} = \frac{w_i}{W_I(m)}$$

donde $W_I(m)$ es el peso de $ECS(t_i)$ en el marcado m, definido como:

$$W_I(m) = \sum_{k:t_k \in ECS(t_i) \cap E(m)} w_k$$

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Puede ocurrir que varios ECS con transiciones inmediatas de igual prioridad estén sensibilizados simultáneamente

- Si las subredes de transiciones inmediatas son libres de confusión entonces la forma de resolver el conflicto es irrelevante con respecto al modelo estocástico resultante

Redes de Petri estocásticas generalizadas

- Las GSPN son isomorfas a los procesos semi-markovianos
- El análisis de una GSPN puede hacerse estudiando una CTMC
- El diagrama de tasas de transición entre estados de la cadena de Markov corresponde al grafo de alcanzabilidad *tangible* de la GSPN
- La distinción entre remuestreo, memoria de sensibilización y memoria del pasado es irrelevante debido a la desmemoria de la distribución exponencial

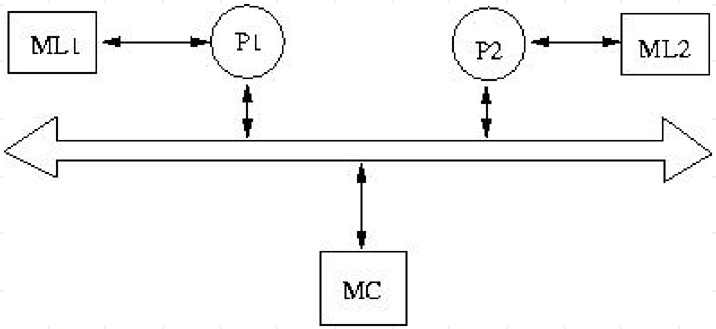
Redes de Petri estocásticas generalizadas

- El tiempo de permanencia en un marcado tangible se distribuye exponencialmente con parámetro igual a la suma de las tasas de todas las transiciones sensibilizadas, por tanto el tiempo medio de estancia en un marcado m es:

$$E[SJ(m)] = \left[\sum_{t \in E(m)} w(t) \right]^{-1}$$

Un ejemplo sencillo

- Multiprocesador de memoria compartida

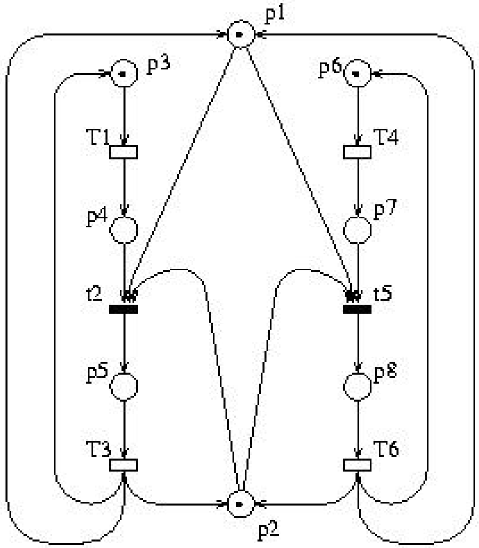


el comportamiento de ambos procesadores es idéntico:

- una secuencia cíclica de actividad local, seguida de
- una petición de acceso a la memoria compartida y,
- por último, del acceso a dicha memoria

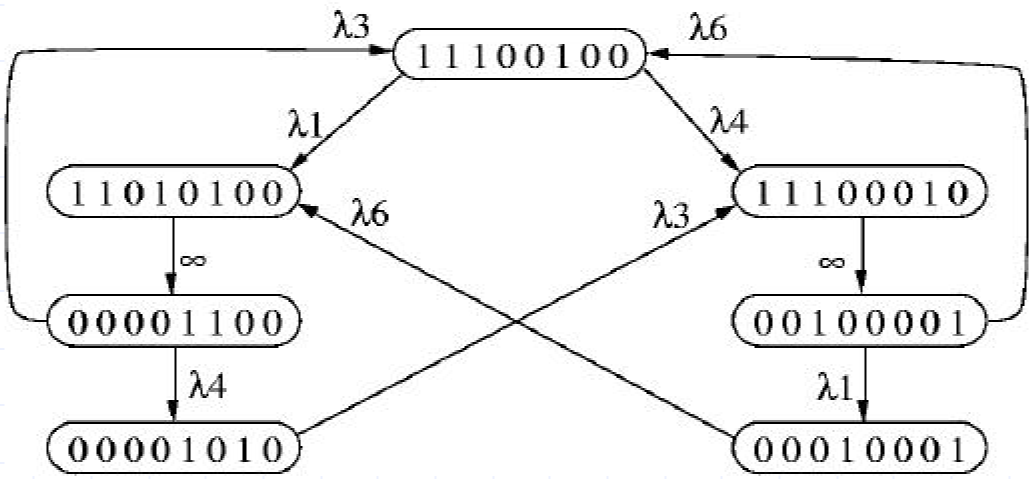
Un ejemplo sencillo

- Se supone que todas las acciones requieren un tiempo de ejecución distribuido exponencialmente, excepto...
- la acción de petición de acceso a la memoria compartida, que se considera instantánea



Un ejemplo sencillo

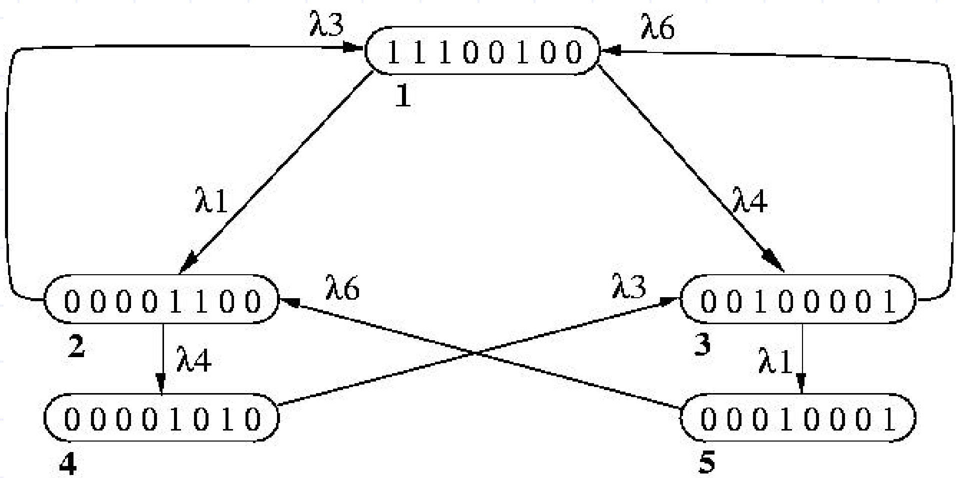
- El grafo de alcanzabilidad de la GSPN es el siguiente



  - no representa exactamente una CTMC, ya que en ese tipo de procesos estocásticos no se incluye la posibilidad de tasas infinitas

Un ejemplo sencillo

- El diagrama de tasas de transición entre estados:



  - Sólo aparecen los estados tangibles

Un ejemplo sencillo

- La solución, resolviendo el sistema lineal de ecuaciones:

$$(\boldsymbol{\pi}_1, \boldsymbol{\pi}_2, \boldsymbol{\pi}_3, \boldsymbol{\pi}_4, \boldsymbol{\pi}_5) \cdot \begin{bmatrix} -(\lambda_1+\lambda_4) & \lambda_1 & \lambda_4 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & -(\lambda_3+\lambda_4) & 0 & \lambda_4 & 0 \\ \lambda_6 & 0 & -(\lambda_1+\lambda_6) & 0 & \lambda_1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & -\lambda_3 & 0 \\ 0 & \lambda_6 & 0 & 0 & -\lambda_6 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\pi}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 + \boldsymbol{\pi}_3 + \boldsymbol{\pi}_4 + \boldsymbol{\pi}_5 = 1$$

- Ejemplo de índice de rendimiento
  - *tasa de utilización de la memoria compartida*
    - en este caso coincide con la probabilidad en estado estacionario del único estado en el que el lugar p_2 (memoria común disponible) está marcado

$$\overline{\mu}[p_2] = \pi_1$$

Un ejemplo sencillo

- Otro ejemplo de índice de rendimiento
  - *Potencia de procesamiento, P, del sistema*
    - es el número medio de procesadores haciendo un trabajo efectivo (accediendo únicamente a su memoria local correspondiente)
    - se calcula definiendo la función de ganancia

$$r_P(m) = m[p_3] + m[p_6]$$

    - y por tanto:

$$P = \sum_{m_i \in RS(m_0)} r_P(m_i)\pi_i = 2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3$$

Herramientas

- Para poder aplicar la aproximación presentada (modelado y análisis con GSPN) se precisan herramientas software con:
  - Posibilidades de construcción de modelos
  - Depuración del modelo
  - Resolución del modelo (simulación o markoviana)
  - Definición de índices de rendimiento calculados
  - Visualización de resultados

  - Existen varias soluciones: por ejemplo, *GreatSPN*, de la Universidad de Turín

Final

- Más información:
  - Leer los apuntes y la bibliografía incluida en ellos
  - Buscar bibliografía en *The Petri Nets Bibliography*
    - http://www.informatik.uni-hamburg.de/TGI/pnbib/
- Preguntas:
  - Aquí
  - Por mail: jcampos@posta.unizar.es