EXAMEN DE MODELOS ABSTRACTOS DE CÁLCULO

PRIMERA PARTE (3 puntos sobre 8)

4 de febrero de 2009

TIEMPO para realizar esta parte: 45 minutos.

Enunciar el problema de parada y demostrar que no es decidible.

EXAMEN DE MODELOS ABSTRACTOS DE CÁLCULO

SEGUNDA PARTE (5 puntos sobre 8)

4 de febrero de 2009

Nota.- Todas las soluciones han de ser expuestas y justificadas de forma clara y completa.

TIEMPO para realizar esta parte: 2h.

1. *2,5 puntos.* Sea

   $$X = \{\, p \mid \exists z < |p| \text{ tal que } \varphi_p(z) = z\}.$$

   ¿Es X decidible? ¿Es X semidecidible? ¿Es $\bar{X}$ semidecidible?

2. *2,5 puntos.* Demostrar que el siguiente problema es NP-completo.

   Entrada: $G = (V, A)$ grafo no dirigido con vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ y aristas $A \subseteq V \times V$,
   $k \in \mathbb{N}, k \geq 1$.

   Salida: ¿Existe un grafo $G' = (V, A')$ con $A \subseteq A'$ tal que $|A' - A| \leq k$ y G' tiene un camino hamiltoniano?

   (Codificación: el grafo con matriz de adyacencia y el natural en binario.)

Resumen de la solución al examen del 4 de febrero de 2009
Modelos Abstractos de Cálculo

Primera parte

La solución completa se puede encontrar en los apuntes de la asignatura.

Algunos errores detectados en la primera parte

No se puede utilizar sin demostración el hecho de que K, el problema diagonal de parada, no es decidible. Tampoco se puede utilizar sin demostración que $\bar{K}$ no es semidecidible.

Es un error *grave* razonar que el hecho de que un programa determinado (normalmente una simulación) no resuelva el problema de parada implica que no se puede resolver. El mismo tipo de razonamientos (que un programa determinado no sirve) es erróneo para demostrar que $\bar{H}$ no es decidible. Por ejemplo, ¿cómo sabemos que un determinado análisis del código (por ejemplo de las condiciones de los bucles) no nos dice si el programa para o no? La respuesta es que lo sabemos porque tenemos una demostración formal como la que hay en los apuntes.

Segunda parte

Problema 1

X es semidecidible ya que el siguiente programa lo demuestra:

```
Leer P;
  T:=1; ÉXITO:= falso; ENCONTRADO:=falso;
  Mientras que NOT ENCONTRADO
    Para X:= 1 to |P|-1 hacer
      SimularConTiempo(P,X,T,ÉXITO,RESULTADO)
      ENCONTRADO:= ÉXITO AND (RESULTADO=X);
    Fin Para;
    T:=T+1;
  Fin Mq;
Devuelve 1;
```

X no es decidible ya que $H \leq_{\mathrm{m}} X$ mediante la siguiente reducción f:

$$f(p,x) = \begin{array}{l} \text{“Leer N} \\ \text{constantes CP:=}p\text{; CX:=}x\text{;} \\ \text{Simular(CP, CX, ÉXITO);} \\ \text{Si ÉXITO entonces Devuelve N.”} \end{array}$$

Hay que razonar porqué f es a reducción buscada, y que f es total y calculable. Por tanto $\bar{X}$ no es semidecidible, ya que X es no decidible y semidecidible.

Algunos errores detectados en el problema 1

En general el enunciado del problema no puede ser modificado (por ejemplo para hacerlo más sencillo). Por ejemplo en este enunciado se pide que exista una z (menor que $|p|$) para la que el programa cumpla lo que se indica, no es el mismo problema que si nos dan como dato tanto un programa p como una z.
En particular, el siguiente programa NO demuestra que X es semidecidible:

```
Leer P;
  T:=|P|-1; ÉXITO:= falso; ENCONTRADO:=falso;
    Para X:= 1 to T hacer
      SimularConTiempo(P,X,T,ÉXITO,RESULTADO)
      ENCONTRADO:= ÉXITO AND (RESULTADO=X);
    Fin Para;
Devuelve ENCONTRADO;
```

Un error *grave* es no escribir bien el complementario de X, por ejemplo empezando la condición con $\forall z \geq |p|$. El complementario de X es exactamente el siguiente:

$$\bar{X} = \{\, p \mid \forall z < |p| \;\; (p(z)\!\uparrow \;\vee\; (p(z)\!\downarrow \;\wedge\; \varphi_p(z) \neq z))\}.$$

Por último la siguiente función NO es una reducción de $\bar{H}$ en $\bar{X}$:

$$f(p,x) = \begin{array}{l} \text{“Leer N} \\ \text{constantes CP:=}p\text{; CX:=}x\text{;} \\ \text{Simular(CP, CX, ÉXITO);} \\ \text{Si ÉXITO entonces Devuelve -N.”} \end{array}$$

De hecho para cualquier p, x, se cumple que $f(p,x) \in \bar{X}$.

Problema 2

Sea $ExtHAM$ (extensión de hamiltoniano) el problema del enunciado. Para ver que es NP-completo hay que ver que está en la clase NP y que existe una reducción en tiempo polinómico de HAM (u otro NP-completo) a $ExtHAM$.

Demostración de que $ExtHAM \in$ NP

Sea *compExtHAM* el siguiente problema:

Entrada: $G = (V, A)$ grafo no dirigido con vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ y aristas $A \subseteq V \times V$,

$k \in \mathbb{N}, k \geq 1,$

$G' = (V, A')$ grafo no dirigido con vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ y aristas $A' \subseteq V \times V$,

γ lista de n vértices de V.

Salida: ¿Se cumple que $A \subseteq A'$, $|A' - A| \leq k$ y que γ es un camino hamiltoniano de G'?

(Codificación: los grafos con matriz de adyacencia, el natural en binario y la lista en binario separada por comas.)
Por definición, G, k tiene solución SÍ para $ExtHAM \iff$ existen G', γ tal que G, k, G', γ tiene solución SÍ para $compExtHAM$.
Comparamos el tamaño de las entradas, teniendo en cuenta que $k \leq n^2$ al tratarse de un número de aristas entre n vértices

$$|G, k| \geq |G| = n^2$$

$$|G, k, G', \gamma| = |G| + |k| + |G'| + |\gamma| + 3 \leq 2n^2 + \log k + n \log n \leq 4n^2$$

Luego $|G, k, G', \gamma| \leq 4|G, k|$.
Por otro lado para resolver $compExtHAM$ con una entrada G, k, G', γ es necesario:

1. Ver que $A \subseteq A'$ viendo que siempre que hay un 1 en la matriz de G hay también 1 en la matriz de G'. Tiempo $O(n^2)$.

2. Ver que $|A' - A| \leq k$ contando los 1's de cada una de las dos matrices y comparando. Tiempo $O(n^2)$.

3. Ver que $\gamma = (c_1, \ldots, c_n)$ es un camino hamiltoniano de G', viendo que $\{c_i, c_{i+1}\}$ es una arista de G' para todo i (tiempo $O(n)$) y que no hay vértices repetidos en γ (tiempo $O(n)$ si asumimos acceso directo a γ, $O(n^2)$ en general).

Luego podemos resolverlo en tiempo $\leq cn^2$ para alguna constante c. Como $|G, k, G', \gamma| \geq n^2$ se trata de tiempo lineal en el tamaño de la entrada. Por tanto $compExtHAM \in \mathrm{P}$.
Luego $ExtHAM \in \mathrm{NP}$.

Demostración de que $HAM \leq^{\mathrm{p}}_{\mathrm{m}} ExtHAM$

La reducción más sencilla es la siguiente f, dada $G = (V, A)$ una entrada cualquiera de HAM, con $V = \{1, \ldots, n\}$ y conjunto de aristas A, definimos

$$f(G) = (H, 1) \quad \text{con } H = (\{1, \ldots, n+1\}, A)$$

es decir, H tiene un vértice más que G y las mismas aristas, y la k del enunciado $ExtHAM$ vale 1.

Veamos que se trata de una reducción válida. Si G tiene un hamiltoniano entonces podemos añadir una arista a H (la que va desde $n+1$ al principio del camino) y así tenemos un grafo H' con hamiltoniamo. Luego $H, 1$ tiene solución SÍ para $ExtHAM$.

En la otra dirección, si $f(G) = (H, 1)$ tiene solución SÍ para $ExtHAM$ es porque hay alguna forma de añadir una arista a H y que el grafo resultante tenga un camino hamiltoniano C. Como el vértice $n+1$ está aislado en H la arista añadida tiene que incluir $n+1$. Como $n+1$ sólo está en una arista el vértice $n+1$ es el principio o el final del camino C. Si cogemos el hamiltoniano C y le quitamos el vértice $n+1$ nos queda un camino hamiltoniano de G ya que la única arista adicional era la de $n+1$ y el único vértice adicional era el $n+1$. Luego G tiene solución SÍ para HAM.

Para calcular f es necesario añadir una fila y una columna de ceros al final de la matrix de G. Esto tiene coste $O(n)$. Como la entrada G cumple $|G| \geq n^2$, f se puede calcular en tiempo polinómico en el tamaño de la entrada. f es una reducción en tiempo polinómico de HAM a $ExtHAM$.

Algunos errores detectados en el problema 2

El siguiente problema casi seguro no está en P, si lo estuviera tendríamos que $HAM \in$ P, P $\neq$ NP, alguien ganaría un millón de dólares, etc, etc.

Entrada: $G = (V, A)$ grafo no dirigido con vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ y aristas $A \subseteq V \times V$,

$k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

$G' = (V, A')$ grafo no dirigido con vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ y aristas $A' \subseteq V \times V$,

Salida: ¿Se cumple que $A \subseteq A'$, $|A' - A| \leq k$ y que existe un camino hamiltoniano de G'?

(Codificación: los grafos con matriz de adyacencia y el natural en binario.)

Lo mismo ocurre con el siguiente problema.

Entrada: $G = (V, A)$ grafo no dirigido con vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ y aristas $A \subseteq V \times V$,

$k \in \mathbb{N}, k \geq 1$,

$G' = (V, A')$ grafo no dirigido con vértices $V = \{1, \ldots, n\}$ y aristas $A' \subseteq V \times V$ y que **tiene un camino hamiltoniano**,

Salida: ¿Se cumple que $A \subseteq A'$, $|A' - A| \leq k$?

(Codificación: los grafos con matriz de adyacencia y el natural en binario.)

En general es una mala práctica *ocultar* el problema en condiciones que obligamos a cumplir a los datos. Un algoritmo que resuelve un problema debe hacer siempre las dos siguientes acciones, dada una cadena cualquiera w

1. Verificar que w corresponde a una entrada válida.

2. Resolver el problema con la entrada codificada por w.

El tiempo total es la suma de los de los dos pasos anteriores. En los ejemplos usuales el paso 1. es inmediato y casi siempre muy rápido (en cualquier caso tiempo polinómico).

Un fallo *grave* es hacer el siguiente razonamiento: si $x \leq 3$ y $z \leq 5$ entonces $x \leq y$. Este se ha aplicado al razonamiento (erróneo): tengo un algoritmo $O(n^2)$ (es decir, tiempo $\leq cn^2$) para $compExtHAM$, como la entrada es $O(n^2)$ (es decir, $|G, k, G', \gamma| \leq c'n^2$) entonces el tiempo es $O(|G, k, G', \gamma|)$.

Las siguientes funciones NO son reducciones de HAM en $ExtHAM$. La mayoría en algún caso convierte un G con solución NO para HAM en $f(G)$ con solución SÍ para $ExtHAM$ (alguna convierte un SÍ en un NO).

- $f(G) = (H, 1)$ con h construido a partir de G añadiendo un nuevo vértice $n + 1$ y aristas desde cada vértice de G a $n + 1$.

- $f(G) = (H, n)$ con h construido a partir de G añadiendo un nuevo vértice $n + 1$ y aristas desde cada vértice de G a $n + 1$.

- $f(G) = (H, 1)$ con h construido a partir de G añadiendo dos nuevos vértice $n + 1, n + 2$ y aristas desde cada vértice de G a $n + 1$.

- $f(G) = (H, n)$ con h construido a partir de G añadiendo un nuevo vértice $n + 1$ y ninguna arista.

- $f(G) = (H, 1)$ con h construido a partir de G añadiendo una arista de 1 a 1.

- $f(G) = (H, 1)$ con h construido a partir de G añadiendo todas las aristas que le faltan a G.

Otros errores importantes:

- No definir completamente la reducción, hablando de $f(G) = (H, k)$ con H definido a partir de G y k *sin definir*, o bien H el resultado de añadir a G un conjunto de aristas A' que no se especifica.

- Definir la reducción usando el principio o el final de un camino hamiltoniano de G. Calcular el hamiltoniano (también sólo sus extremos) parece requerir tiempo exponencial (y si no volvemos a tener P = NP), tampoco está claro cuál es la reducción en el caso de que G no tenga hamiltoniano.