Ejercicios de Lenguajes Gramáticas y Autómatas

Curso 2004 / 2005

Lenguajes Regulares

A. Ejercicio básicos

1) Dado el alfabeto $\sum = \{a, b, c\}$, construid expresiones regulares cuyos lenguajes asociados contengan las palabras w que satisfacen las condiciones siguientes:

   a. Hay un número par de a´s en w.
   b. Hay $4i + 1$ b's en w, para algún $i \geq 0$.
   c. $|w| = 3i$, para algún $i \geq 0$.
   d. La cadena abc no aparece en w.

2) Una expresión regular es *ambigua* si hay una palabra que puede ser obtenida de la expresión regular de, como mínimo, dos formas diferentes. De las expresiones regulares siguientes, cuáles con ambiguas:

   a. a((ab)*cd)* + a(ababcb*)*a*
   b. aab*(ab)* + ab* + a*bba*
   c. aaba* + aaaba + aabba* + a

3) Construid, aplicando las técnicas formales vistas en clase, AFNDs que reconozcan los lenguajes especificados por las siguientes expresiones regulares:

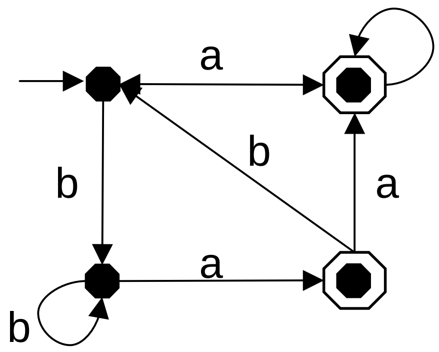
   a. a*ba*ab*
   b. $b((aab^* + a^4)b)^*a$
   c. $ab(((ab)^* + b^3)^* + a)^*b$
   d. (00 + (1 + 01)(11 + 0)*10)*

4) Obtened, aplicando las técnicas formales presentadas en clase, los AFDs mínimos equivalentes a los AFNDs resultantes del ejercicio anterior.

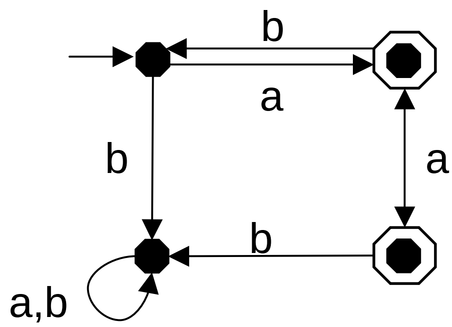
5) Construid AFDs que reconozcan los siguientes lenguajes:

   a. Las palabras sobre {a, b} que no contienen la cadena *aaa*.
   b. Las palabras sobre {0, 1} que representan múltiplos de tres escritos en binario.
   c. Las palabras sobre {0, 1} que representan múltiplos de cinco escritos en binario.
   d. El conjunto de todas las palabras sobre {a, b} tales que toda cadena de cinco símbolos contiene como mínimo dos a's.
   e. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 2n,\ |w|_b = 2m,\ n, m \in N\}$
   f. $\{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = 3n,\ n \in N$, y w no contiene la cadena *aba*$\}$
   g. Palabras sobre {0, 1} en que cada símbolo que ocupa una posición múltiplo de tres es un 1.

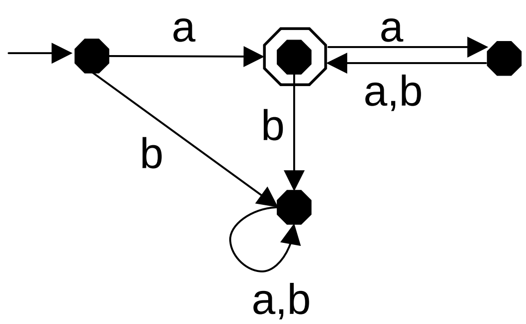
6) Para cada uno de los siguientes AFD, obtened una expresión regular que denote el lenguaje que reconoce (utilizando el Lema de Arden):



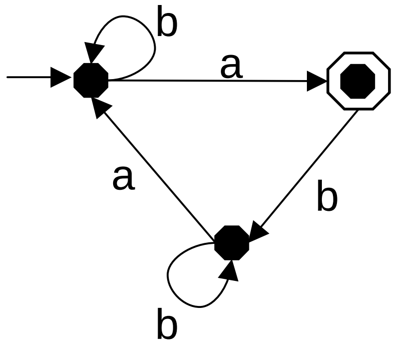
a.



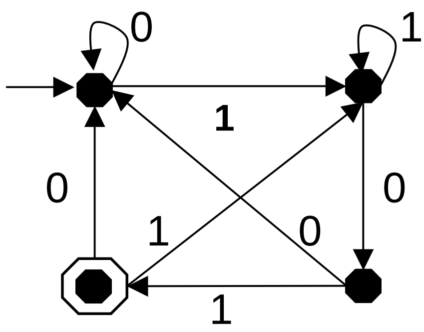
b.



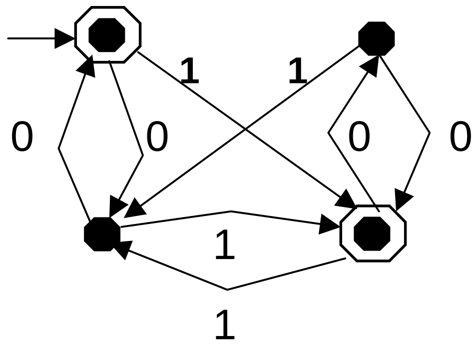
c.



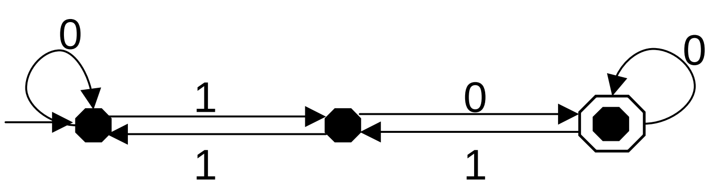
d.



f.



g.



h.

7) ¿Es verdad que si un lenguaje es unión de lenguajes no regulares, él mismo no puede ser regular? Si lo es, demostradlo. Si no, proporcionad contraejemplos. ¿Pasa lo mismo con la intersección? ¿Y con la concatenación?.

8) Demostrad, aplicando técnicas formales vistas en clase, que los siguientes lenguajes no son regulares:

   a. $\{0^m 1^n 0^{n+m} \mid n, m \geq 1\}$
   b. $\{ww \mid w \in (0+1)^+\}$
   c. $\{(01)^n (01)^n \mid n \geq 0\}$
   d. El conjunto de todas las palabras sobre {0, 1}con igual número de ceros que de unos
   e. $\{w \in (0+1)^+ \mid w = w^R\}$ (conjunto de palíndromos sobre {0, 1})
   f. $\{ xx^R w \mid x, w \in (0+1)^+\}$
   g. $\{0^n \mid$ n es un número primo$\}$
   h. $\{0^m 1^n \mid m \neq n\}$
   i. $\{x\#y \mid x, y \in (0+1)^*$ y ($|x|$ no es múltiplo de 5 ó $x = y$)$\}$

B. Ejercicios de examen

9) Para todo lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, se define el conjunto de sufijos de L como

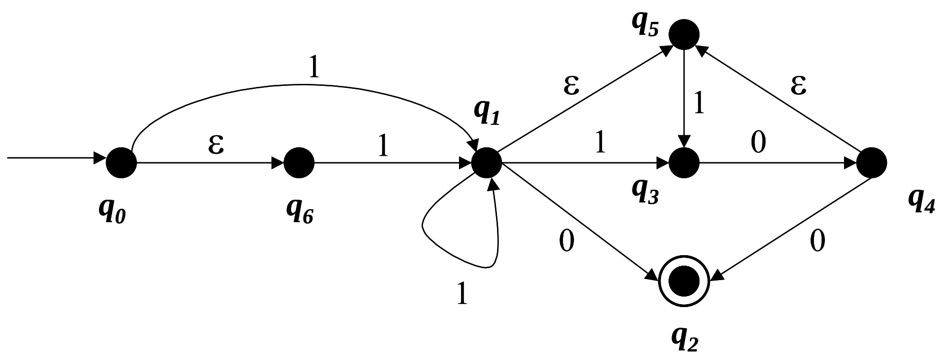
$$sufix(L) = \{x \mid \exists y \text{ tq. } yx \in L\}$$

Demostrad que si L es regular, *sufix*(L) también lo es.

10) Demostrad formalmente, **aplicando técnicas vistas en clase**, para cada uno de los siguientes lenguajes, si se trata de un lenguaje regular:

a. $L = \{a^{2n}b^n \mid n \geq 0\}$
b. $L = \{wxw^I \mid w, x \in \{a, b\}^+\}$
c. $L = \{a^nb^k \mid n > k \text{ y } n \geq 0\}$
d. $L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid \text{se cumple que } |x|_a < |x|_b \text{ y } |x|_a < |x|_c\}$
e. $L = \{u\#v \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u|_a = |v|_b \text{ y } |u| = 2|v|\}$
f. $L = \{a^nw_1b^{r+s}w_2a^n \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, |w_1| = r, |w_2| = s, n \geq 0 \text{ y } r, s > 1\}$

11) Sea un AFND con ε-transiciones M,



Importante: La solución de los distintos apartados de este ejercicio deberá contener el proceso de transformación completo aplicado a cada autómata en particular.

a. Obtened la expresión regular, aplicando sistemas de ecuaciones, que especifica el lenguaje reconocido por el autómata AFND M
b. A partir del AFND con ε-transiciones M, y aplicando la transformación formal vista en clase, construid un AFND equivalente sin ε-transiciones. Expresad la relación de transición del AFND resultante en forma de tabla.
c. Partiendo del AFND resultante del apartado anterior, y aplicando la transformación formal vista en clase, construid un AFD equivalente. Expresad la función de transición del AFD resultante en forma de tabla.
d. Calculad el AFD mínimo del autómata resultante del apartado anterior. Debéis aplicar el método formal visto en clase.

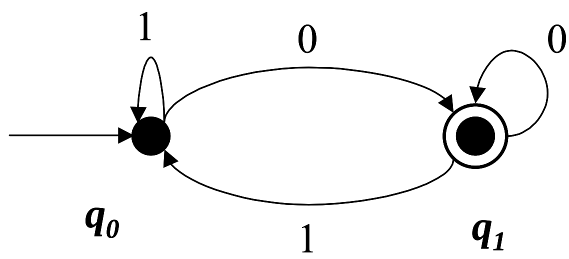
12) Dada la expresión regular r = (0+10*1) completad las siguientes tareas:

a. Construid el AFND que reconozca L(r) utilizando las técnicas formales presentadas en clase (reflejad los pasos seguidos para su construcción sin realizar simplificaciones intermedias).
b. A partir del AFND con ε-transiciones de la tarea previa, construid un AFND equivalente sin ε-transiciones (por claridad, expresad su regla de transición en forma de tabla, en vez de dibujar el autómata).
c. A partir del AFND sin ε-transiciones de la tarea anterior, construid un AFD equivalente (expresad su función de transición en forma de tabla).
d. Obtened el AFD mínimo equivalente al construido en el apartado previo (en este caso, dibujad gráficamente el autómata).

13) Dado el lenguaje L, se define el lenguaje

$$Impar(L) = \{w \in L \mid \text{se cumple que } |w| \text{ es impar}\}$$

Si el lenguaje L es regular entonces *Impar*(L) también lo es. A partir de esta afirmación, y siendo M el autómata de la figura, diseñad un autómata que reconozca el lenguaje *Impar*(L(M)). Explicad brevemente las ideas aplicadas en su construcción.



14) Obtened el AFD que reconozca el siguiente lenguaje

L = {x ∈ {a, b}* | entre cada dos a's hay un número impar de b's}

Algunos ejemplos de palabras de este lenguaje serían ababa, bbbb,abb,bba,a,..., pero no abba, aa,... Explicad brevemente las ideas aplicadas en su construcción.

15) Sea un AFND M. El sistema de ecuaciones para el que se cumple $L(M) = A_1$ es el siguiente, siendo $\Sigma=\{a,b\}$:

$$A_1 = aA_3 + bA_2$$
$$A_2 = aA_3 + aA_2$$
$$A_3 = aA_4 + bA_2 + aA_6$$
$$A_4 = bA_5$$
$$A_5 = bA_3 + aA_6$$
$$A_6 = \varepsilon$$

a. Dibujad a partir del sistema de ecuaciones del enunciado el AFND correspondiente.

b. A partir del AFND obtenido en el apartado previo, obtener el AFD equivalente al anterior aplicando las transformaciones formales presentadas en clase. Expresad la función de transición del AFD calculado en forma de tabla
c. Obtened el sistema de ecuaciones que define el AFD resultante del apartado previo. No se pide resolverlo.
d. ¿Cuál es la diferencia, atendiendo al conjunto de ecuaciones, entre un sistema de ecuaciones que define un AFND cualquiera y el que define su AFD equivalente?.

16) Una máquina de refrescos fabricada en Lepe, y que aún no ha sido adaptada para funcionar con euros, se comporta como sigue:

- las latas cuestan 125 pesetas.
- sólo acepta monedas de cinco y veinte duros — se denotarán con "*C*" las monedas de "Cinco duros" (no de "Cien pesetas") y con "*V*" las de "Veinte duros" (no de "Veinticinco pesetas");
- no sabe dar cambio: en cuanto ha ingresado más de 125 pta., devuelve todas las monedas introducidas hasta ese momento.

Sea L el lenguaje formado por las combinaciones de *C*'s y *V*'s por las que la máquina da una lata.

a. Construid un AFD que reconozca el lenguaje especificado.
b. A partir del AFD del apartado previo, y utilizando técnicas formales presentadas en clase, calculad la expresión regular que especifica el lenguaje reconocido por el autómata.

17) Una *progresión aritmética* es una secuencia de números naturales igualmente espaciados. Por ejemplo, {4,7,10,...} es una progresión aritmética. Toda progresión aritmética tiene dos parámetros que la determinan completamente: el punto de partida *p* y la diferencia común *q*. Se puede definir una progresión aritmética en términos de esos dos parámetros:

$$A_{pq} = \{x \mid x = p + nq \text{ para algún } n \in N\}$$

Obsérvese que, según esta definición, un conjunto que contenga un único número natural es una progresión aritmética con q = 0. Así, por ejemplo, {3} es una progresión aritmética A_{30}.

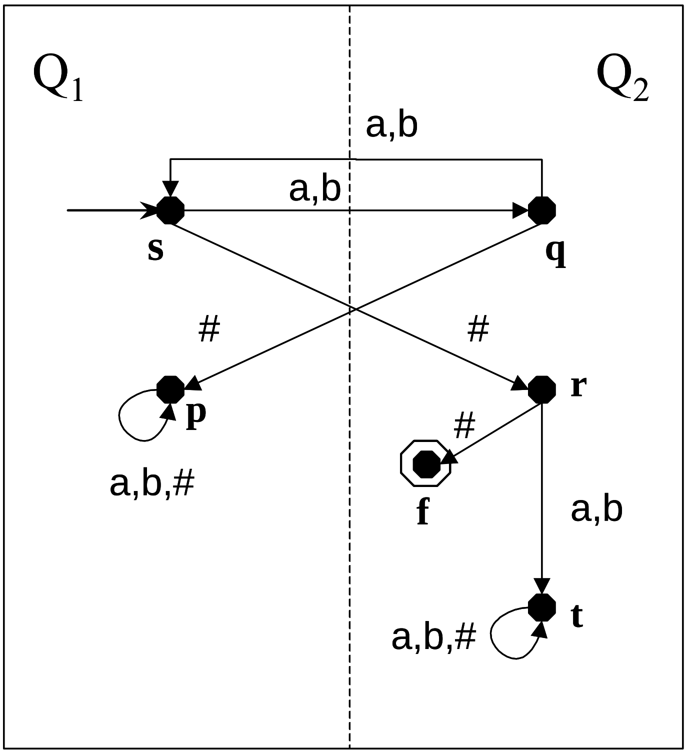
a. Sea A_{pq} una progresión aritmética. Demostrad formalmente aplicando el Lema de Bombeo si el lenguaje L es regular.

$$L = \{ a^i \mid i \in A_{pq} \}$$

18) Un Autómata Finito Determinista (AFD) tiene como entrada una cadena de símbolos o palabra. Por tanto, un AFD puede verse como una máquina con una cinta de entrada donde están situados los símbolos de la palabra a reconocer.

Un **AFD de Dos Cintas** es una máquina que en vez de procesar una cadena de símbolos de entrada (es decir, tener una cinta de símbolos de entrada), procesa dos simultáneamente. Opera sobre pares de cadenas (u#, v#), donde u, v $\in \Sigma^*$ y # es una marca de final no contenida en el alfabeto Σ (u# estaría en la primera cinta de entrada y v# en la segunda cinta). El conjunto de estados está dividido en dos subconjuntos Q_1 y Q_2. Si el estado actual $q \in Q_1$, entonces se procesa un símbolo de entrada de la primera cinta y avanza al siguiente símbolo; si $q \in Q_2$, se hace lo mismo pero operando sobre la segunda cinta. El autómata completa la operación cuando alcanza la marca de final # en ambas cintas. Un par (u#, v#) es aceptado si el autómata alcanza las marcas de final en ambas cintas y el estado actual es un estado final.

Por ejemplo, el siguiente AFD de Dos Cintas reconoce todos los pares de cadenas (u#, v#) sobre el Σ ={a,b} de igual longitud (|u| = |v|). Su estado inicial es s y el conjunto de estados finales está formado únicamente por f.



Construid un AFD de Dos Cintas que reconozca el lenguaje:

a. L = {(u#, v#) | u , v $\in$ {a,b}*, |u| = 2|v|}
b. L = {(u#, v#) | u , v $\in$ {a,b}*, (2|u| = |v|) AND
   (∇ i$\in$ (1..|u|) se cumple $\alpha_i = \beta_{2i-1}$, siendo u=$\alpha_1 \ldots \alpha_{|u|}$ y v=$\beta_1 \ldots \beta_{|v|}$)}
c. L = {(u#, v#) | u , v $\in$ {a,b}*, (|u| = |v|) AND (|u|, |v| siempre un valor par)
   AND (∇ i$\in$ (1..|u|) se cumple:
   (1) si (i mod 2 <> 0) entonces $\alpha_i = \beta_{i+1}$
   (2) si (i mod 2 = 0) entonces $\alpha_i = \beta_{i-1}$
   siendo u=$\alpha_1 \ldots \alpha_{|u|}$ y v=$\beta_1 \ldots \beta_{|v|}$)}

Lenguajes Independientes del Contexto

C. Ejercicio básicos

1) La siguiente gramática genera el lenguaje de expresiones regulares 0*1(0+1)*:

$$S \rightarrow A1B$$
$$A \rightarrow 0A \mid \varepsilon$$
$$B \rightarrow 0B \mid 1B \mid \varepsilon$$

Obtened posibles derivaciones por la derecha y por la izquierda para las siguientes cadenas:

   a. 00101
   b. 1001
   c. 00011

2) Obtened una gramática regular para los siguientes lenguajes:

   a. a*b+a
   b. a*b+b*a
   c. (a*b+b*a)*

3) Construid una autómata finito para las siguientes gramáticas regulares:

   a. $S \rightarrow aS \mid bB \mid b$
      $B \rightarrow cC$
      $C \rightarrow aS$

   b. $S \rightarrow abA \mid B \mid baB \mid \varepsilon$
      $A \rightarrow bS \mid b$
      $B \rightarrow aS$

4) Considerad la GIC G definida por las producciones

$$S \rightarrow aS \mid Sb \mid a \mid b$$

Demostrad por inducción sobre la longitud de la cadena, que ninguna cadena de L(G) tiene *ba* como subcadena.

5) Dada la gramática G

$$S \rightarrow aS \mid aSbS \mid \varepsilon$$

   a. Demostrad que es ambigua especificando dos posibles árboles de derivación para la cadena *aab*.
   b. Encontrad otra gramática que genere L(G) y no sea ambigua

6) Obtened una gramática independiente del contexto para cada uno de los siguientes lenguajes independientes del contexto:

   a. $\{a^m b^n \mid m \geq n\}$
   b. $\{w \in \{a,b\}^* \mid$ w tiene el doble de *aes* que de *bes*$\}$
   c. $\{a^m b^n \mid n \leq m \leq 2n \}$
   d. $\{a^m b^n c^p d^q \mid m+n \geq p+q\}$

7) Aplicad la Transformación 1 para eliminar aquellos no terminales de la gramática que no deriven una cadena de terminales:

   a. $S \rightarrow aAb \mid cEB \mid CE$
      $A \rightarrow dBE \mid eeC$
      $B \rightarrow ff \mid D$
      $C \rightarrow gFB \mid ae$
      $D \rightarrow h$

   b. $S \rightarrow a \mid aA \mid B \mid C$
      $A \rightarrow aB \mid \varepsilon$
      $B \rightarrow Aa$
      $C \rightarrow bCD$
      $D \rightarrow ccc$

8) Aplicad la Transformación 2 para eliminar aquellos terminales y no terminales que no derivan del no terminal inicial:

   a. $S \rightarrow aAb$
      $A \rightarrow ccC$
      $B \rightarrow dd \mid D$
      $C \rightarrow ae$
      $D \rightarrow f$
      $U \rightarrow gW$
      $W \rightarrow h$

   b. $S \rightarrow a \mid aA \mid B$
      $A \rightarrow aB \mid \varepsilon$
      $B \rightarrow Aa$
      $D \rightarrow ddd$

9) Aplicad la Tranformación 3 para eliminar las ε-producciones:

   a. $S \rightarrow AB$
      $A \rightarrow aA \mid abB \mid aCa$
      $B \rightarrow bA \mid BB \mid \varepsilon$
      $C \rightarrow \varepsilon$
      $D \rightarrow dB \mid BCB$

   b. $S \rightarrow AbaC$

$A \rightarrow AB$
$B \rightarrow b \mid \varepsilon$
$C \rightarrow D \mid \varepsilon$
$D \rightarrow d$

10) Aplicad la Transformación 4 para eliminar las producciones unitarias:

a. $S \rightarrow CBa \mid D$
   $A \rightarrow bbC$
   $B \rightarrow Sc \mid ddd$
   $C \rightarrow eA \mid f \mid C$
   $D \rightarrow E \mid SABC$
   $E \rightarrow gh$

b. $S \rightarrow Aa \mid Ba \mid B$
   $A \rightarrow Aa \mid \varepsilon$
   $B \rightarrow aA \mid BB \mid \varepsilon$

11) Convertid las siguientes gramáticas a forma normal de Chomsky:

a. $S \rightarrow AB \mid CA$
   $A \rightarrow a$
   $B \rightarrow BC \mid AB$
   $C \rightarrow aB \mid b$

b. $S \rightarrow aAb \mid cHB \mid CH$
   $A \rightarrow dBH \mid eeC$
   $B \rightarrow ff \mid D$
   $C \rightarrow gFB \mid ah$
   $D \rightarrow i$
   $E \rightarrow jF$
   $F \rightarrow dcGGG \mid cF$
   $G \rightarrow kF$
   $H \rightarrow Hlm$

12) Probad, **aplicando técnicas vistas en clase**, si los siguientes lenguajes son independientes del contexto:

a. $\{a^i b^i c^i \mid i \geq 1\}$
b. $\{a^i b^i c^j \mid j \geq i\}$
c. $\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$

13) Obtened un ADPND que acepte el lenguaje $\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$

14) Describid el proceso realizado por el ADPND del ejercicio anterior sobre las cadenas *abaababb* y *abaa*. ¿Son aceptadas por el autómata?

D. Ejercicios de examen

15) Sea la gramática G = ({a,b}, {S,A,B}, S, P) siendo P:

P: { $S \rightarrow AabB$
$A \rightarrow aA \mid bA \mid \varepsilon$
$B \rightarrow Bab \mid Bb \mid ab \mid b$ }

a. Si se observa G, se puede comprobar que no es una gramática regular. Sin embargo, L(G) es un lenguaje regular. ¿Cuál es la expresión regular que especifica L(G)?. Explicad de forma breve y concisa el razonamiento realizado para llegar a definir la expresión regular resultante.

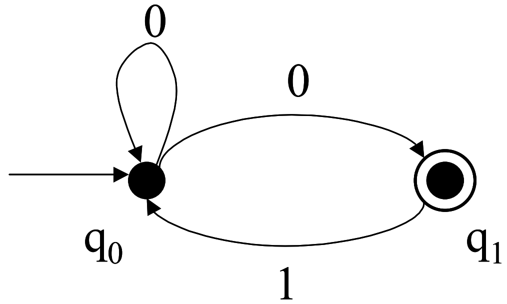
b. Transformad la gramática G en una GIC equivalente en Forma Normal de Chomsky. Para ello deben aplicarse las transformaciones formales que se han presentado en clase. Si creéis que es innecesario aplicar alguna de estas transformaciones, justificad de forma razonada el por qué.

c. Determinad si cada una de las siguientes palabras pertenecen a L(G) aplicando el algoritmo de CYK. ***<u>Importante</u>:*** La solución presentada debe contener el proceso de desarrollo completo que habéis realizado al aplicar el algoritmo. No se valorarán aquellas soluciones donde únicamente se detalle el contenido de la tabla resultado:
   (a) aababb
   (b) aaba
   (c) ababb

16) Dado el lenguaje

$$L = \{ vv^I \mid \text{siendo } v \in L(M) \wedge M \text{ el AFN de la figura}\}$$

a. Construid una gramática independiente del contexto que genere el lenguaje L del enunciado. Explicad de forma breve y concisa el razonamiento realizado para llegar a construir la gramática.



17) Para cada uno de los siguientes lenguajes,

a. $L = \{ a^i b^j c^{i+j} \mid i, j \in N, (i-j) \text{ es par } \}$
b. $L = \{ a^n b^m c^p \mid n \geq 0, m \geq 1, p \geq n+m \}$

construid una gramática independiente del contexto que lo genere. Explicad de forma breve y concisa el razonamiento realizado para llegar a construir la gramática.

18) Demostrad formalmente, **aplicando técnicas vistas en clase**, para cada uno de los siguientes lenguajes, si se trata de un lenguaje regular, si es un lenguaje independiente del contexto, o si es un lenguaje que no es ni regular ni independiente del contexto:

a. $L = \{a^{2n} b^n \mid n \geq 0\}$
b. $L = \{wxw^I \mid w, x \in \{a, b\}^+\}$
c. $L = \{a^n b^k \mid n > k \text{ y } n \geq 0\}$
d. $L = \{x \in \{a,b,c\}^* \mid \text{se cumple que } |x|_a < |x|_b \text{ y } |x|_a < |x|_c\}$
e. $L = \{u\#v \mid u, v \in \{a,b\}^*, |u|_a = |v|_b \text{ y } |u| = 2|v|\}$
f. $L = \{a^n w_1 b^{r+s} w_2 a^n \mid w_1, w_2 \in \Sigma^*, |w_1| = r, |w_2| = s, n \geq 0 \text{ y } r, s > 1\}$

19) Un autómata de dos pilas no determinista (AD2PND) es un autómata no determinista que tiene dos pilas. Formalmente se define un AD2PND como una 8-tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, s, z1, z2, F)$ donde

- Q es un conjunto finito de estados
- Σ es un alfabeto de entrada
- Γ es el alfabeto de las pilas
- Δ es una regla de transición
- $s \in Q$ es el estado inicial
- $z1 \in \Gamma$ es el símbolo inicial de la pila 1
- $z2 \in \Gamma$ es el símbolo inicial de la pila 2
- $F \subseteq Q$ es el conjunto de estados finales.

Notad que:

- Γ es ahora el alfabeto **de las dos pilas**
- En lugar de un símbolo inicial de pila z, ahora hay **un símbolo inicial para cada pila**, z1 y z2. Evidentemente $z1 \in \Gamma$ y $z2 \in \Gamma$
- Δ, la regla de transición, se define de forma algo distinta. Informalmente en cada transición el AD2PND se encuentra en un estado, y dependiendo del símbolo de entrada actual, de la cima de la pila 1 y de la cima de la pila 2, el autómata puede cambiar a un nuevo estado, sin cambiar la cima de las pilas, cambiando la de la pila 1, cambiando la de la pila 2 o cambiando ambas. Notad que para que se pueda producir una transición, **ninguna de las dos pilas puede estar vacía**. Formalmente:

$\Delta \subseteq Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \times \Gamma \times Q \times \Gamma^* \times \Gamma^*$

- Las descripciones instantáneas (DI), que describen la configuración del AD2PND en un instante en particular, ahora deben tener en cuenta las dos pilas. Por tanto una secuencia de 2 DI para un AD2PND como esta: $(q1, aw, bx, cy) \vdash (q2, w, dx, ey)$ representa un movimiento que resulta de (**q2, d, e**) $\in \Delta$(**q1, a, b, c**). (Recordad que intuitivamente esto significa que una de las posibles transiciones desde el estado **q1**, cuando tenemos el símbolo **a** en la entrada, en la cima de la pila 1 tenemos **b** y en la cima de la pila 2 tenemos **c**, es ir al estado **q2**, sustituir en la pila 1 la **b** por una **d** y en la pila 2 la **c** por una **e**)

- Si M es un AD2PND, el lenguaje aceptado por M, denotado como L(M) es el conjunto de las palabras que permiten llevar al autómata a un estado final tras consumirlas por completo de su entrada. Formalmente:

$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (s, w, z1, z2) \vdash^* (p, \varepsilon, u, v) \text{ para } p \in F, u \in \Gamma^* \text{ y } v \in \Gamma^*\}$

- En todo lo demás, un AD2PND funciona igual que un ADPND.

Los AD2PND pueden reconocer algunos lenguajes que no son independientes del contexto.

a. Demostrad, aplicando el Lema de Bombeo para lenguajes independientes del contexto, que el siguiente lenguaje no es independiente del:

$$L = \{a^n b^n a^n \mid n \geq 0\}$$

b. Definid el conjunto de estados Q y la regla de transición Δ para un AD2PND que reconozca el lenguaje dado en el apartado anterior. Los restantes elementos deben ser:

   - $\Sigma = \{a, b\}$
   - $\Gamma = \{Z, A\}$
   - $s \in Q$, debe llamarse q1
   - z1 = Z
   - z2 = Z
   - $F \subseteq Q$, debe ser un solo estado.

   Importante Debéis describir, de manera informal, el funcionamiento de vuestro autómata, especialmente el significado de cada uno de los estados que creéis. Todas aquellas soluciones que únicamente contengan la tabla con la regla de transición, pero que no estén descritas, no serán puntuadas.
   ***Pista*:** Hay varias aproximaciones a este problema, pero una de las más sencillas utiliza **cuatro** estados.

c. Definid el conjunto de estados Q y la regla de transición Δ para un AD2PND que reconozca el siguiente lenguaje:

$$L = \{x\#y\#z \mid (x, y, z \in \Sigma^*) \text{ AND } (|x|_a = |y|_a = |z|_a)\}$$

Los restantes elementos del autómata deben ser:

- $\Sigma = \{a, b, \#\}$
- $\Gamma = \{Z, A\}$
- $s \in Q$, debe llamarse q1
- $z1 = Z$
- $z2 = Z$
- $F \subseteq Q$, debe ser un solo estado.

Importante: Debéis describir, de manera informal, el funcionamiento de vuestro autómata, especialmente el significado de cada uno de los estados que creéis. Todas aquellas soluciones que únicamente contengan la tabla con la regla de transición, pero que no estén descritas, no serán puntuadas.
Pista**:** Hay varias aproximaciones a este problema, pero una de las más sencillas utiliza **cuatro** estados.

20) Sea la Gramática Independiente del Contexto G = ({a,b}, {S,X,Y,Z,A,B}, S, P) siendo P:

P: {

$S \rightarrow X \mid Y$
$X \rightarrow aZb \mid bZa$
$Z \rightarrow aZb \mid bZa \mid \varepsilon$
$Y \rightarrow aB \mid bA$
$B \rightarrow b \mid bB$
$A \rightarrow a$

}

a. ¿Qué transformaciones formales serían necesarias aplicar sobre la gramática del enunciado para obtener una GIC equivalente en Forma Normal de Chomsky (FNC)?. Justificad la respuesta brevemente.

b. Determinad la GIC en FNC equivalente. Para ello deben aplicarse las transformaciones formales que se han justificado como necesarias en el apartado anterior.

c. ¿Cuál es la relación que existe entre la longitud de una palabra generada con una GIC en FNC y el número de pasos de derivación necesarios para generarla?. Justificad la respuesta brevemente.

21) Dado el lenguaje sobre

$$L = \{a^n b a^m b a^{n+m} \mid n, m > 0\}, \ \Sigma = \{a,b\}$$

a. Demostrad formalmente, aplicando el Lema de Bombeo, para el siguiente lenguaje, si se trata de un lenguaje independiente del contexto.

b. Construir una GIC que genere el lenguaje del enunciado. *Se valorará muy positivamente que el número de No Terminales y de producciones de la gramática propuesta sea mínimo.*

c. A partir de la GIC obtenida en el apartado anterior, construid un ADPND que reconozca el lenguaje del enunciado aplicando las técnicas presentadas en clase.

22) Sean las GIC $G_1=(\Sigma_1,S_1,N_1,P_1)$ y $G_2=(\Sigma_2,S_2,N_2,P_2)$ que generan respectivamente los lenguajes $L(G_1)$ y $L(G_2)$. Especificad la colección de elementos que definen la GIC $G=(\Sigma,S,N,P)$ tal que $L(G)=L(G_1)L(G_2)$. Se deben definir dichos elementos en función de los elementos de las dos gramáticas originales.

23) Dado el lenguaje sobre $\Sigma = \{a, b\}$

$$L = \{w_1 a^{2j+1} b^j w_2 \mid \ w_1, w_2 \in \Sigma^*, \ |w_1| = i, |w_2| = 2i, \ i, j \ \geq 0\}$$

a. Determinad una Gramática Independiente del Contexto (GIC) que genere el lenguaje del enunciado. Se impone como restricción que la GIC diseñada, no tenga producciones unitarias. *Se valorará muy positivamente que el número de No Terminales y de producciones de la gramática propuesta sea mínimo.*

b. En función de la GIC resultante del apartado a., ¿Cuál sería el proceso de derivación y el árbol de derivación resultante del proceso para la palabra "*abbaaabbbbaba*"?, ¿y para la palabra "*abababab bbbaba*"?. *No se debe realizar ningún tipo de simplificación sobre los procesos o árboles de derivación resultantes.*

c. Transformad la GIC resultante del apartado a. a una GIC equivalente en Forma Normal de Chomsky. Deberán aplicarse técnicas formales presentadas en clase y documentarse de manera clara todos los pasos de la aplicación de las mismas.

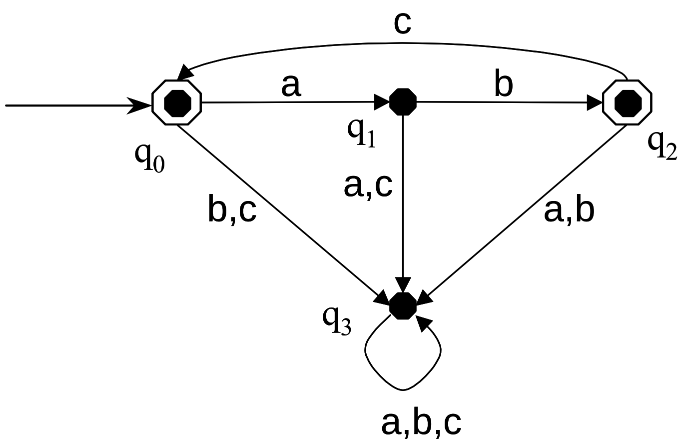
d. Obtened un ADPND capaz de aceptar todas las cadenas del lenguaje generado por la GIC del aparatado a.

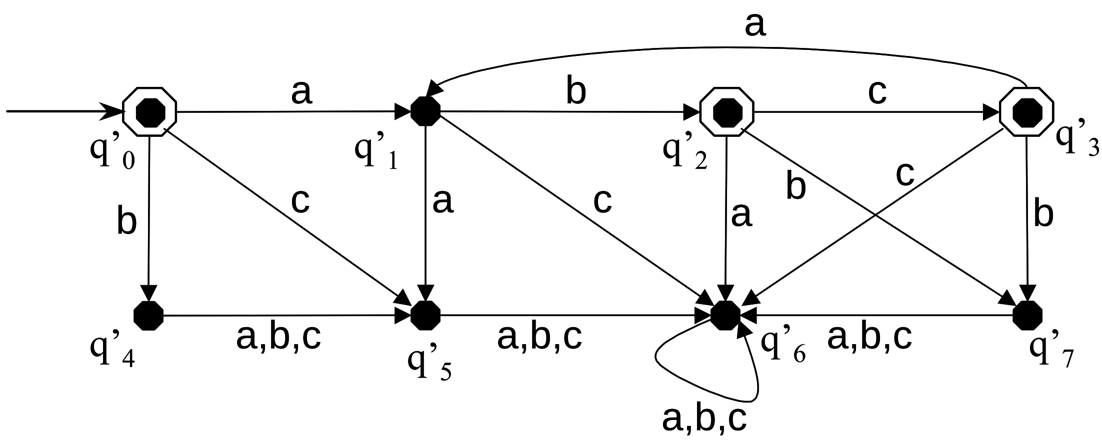
e. Dado el ADPND obtenido en el aparatado d., ¿la palabra "*baaabba*" pertenece al lenguaje que reconoce dicho autómata?. Demostradlo detallando la secuencia de Descripciones Instantáneas (DI) que determinan el proceso de reconocimiento de la palabra. *No se debe realizar ningún tipo de simplificación sobre la secuencia de descripciones instantáneas.*

Exámenes curso 2003 / 2004

1ª Convocatoria

1. ¿Son equivalentes los dos siguientes AFD?. Justificad vuestra respuesta aplicando el algoritmo de equivalencia presentado en clase **(1,5 puntos)**.





2. Obtened una gramática regular para el siguiente lenguaje, definido sobre el alfabeto $\Sigma = \{a,b\}$ **(1 punto)**:

$$L = \{w \in \Sigma^* \mid |w|_a \text{ y } |w|_b \text{ son ambos pares}\}$$

Por ejemplo, las palabras *aabbabab*, *baba* y *bbbb* pertenecen a L, mientras que *a*, *bbbaa* y *bbb*, no pertenecen.

3. Eliminad las producciones unitarias de la siguiente gramática independiente del contexto aplicando la transformación formal presentada en clase. Posteriormente, transformad la gramática resultado en otra equivalente y en Forma Normal de Chomsky **(1,5 puntos)**:

G = ({a}, {S,A,B}, S, P) siendo P:

P: { $S \rightarrow Aa \mid Ba \mid B$
$A \rightarrow Aa \mid \varepsilon$
$B \rightarrow aA \mid BB \mid \varepsilon$ })

4. Demostrad formalmente, **aplicando técnicas vistas en clase**, para cada uno de los siguientes lenguajes, si se trata de un lenguaje regular, si es un lenguaje independiente del contexto, o si es un lenguaje que no es ni regular ni independiente del contexto **(2 puntos)**:

4.1 $L = \{0^n 1 0^{2n} \mid n \geq 1\}$
4.2 $L = \{w_1 b^n w_2 b^n \mid w_1, w_2 \in \{a, b\}^* \text{ y } |w1| = |w2|\}$

5. Definid completamente (conjunto de estados, estado inicial, estados finales, alfabeto, alfabeto de la pila, símbolo inicial de pila, y regla de transición), un ADPND que reconozca el siguiente lenguaje **(2 puntos)**:

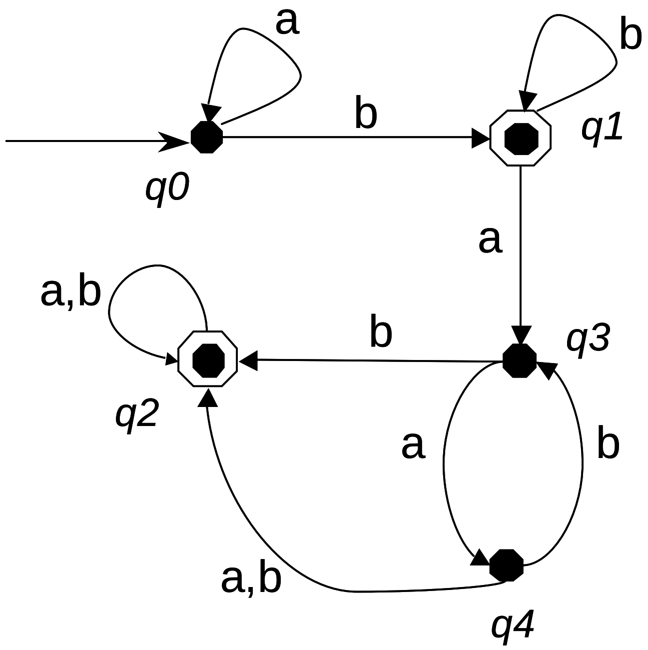
$L = \{ a^m b^n a^m \mid n, m > 0\}$

Importante: Escribid la regla de transición en forma de tabla, tal como se ha hecho en clase. Describid, de manera informal, el funcionamiento de vuestro autómata. Todas aquellas soluciones que no contengan una explicación de cómo funciona el ADPND, no serán puntuadas.

5.1 Dad la secuencia de descripciones instantáneas, sobre el ADPND diseñado, que corresponden a las siguientes palabras:
w_1 = aaabbaaa
w_2 = aabbbaaa

2ª Convocatoria

. Calculad el AFD mínimo equivalente al autómata de la figura. Debéis aplicar el método formal de minimización de autómatas visto en clase **(1,5 puntos)**.



2. Determinad, utilizando el algoritmo de CYK, si las siguientes palabras pertenecen al lenguaje generado por la gramática G. ***Importante:*** la solución presentada debe contener el proceso de desarrollo que habéis realizado al aplicar el algoritmo. No se puntuarán aquellas soluciones que únicamente contengan la tabla resultado **(1,5 puntos)**:

G = ({a,b,c}, {S,A,B,C, D}, S, P) siendo P:

P: { $S \rightarrow AD$
$D \rightarrow BC$
$A \rightarrow a \mid AA$
$B \rightarrow b \mid BB$
$C \rightarrow c \mid CA \mid CC$ })

2.1 aabcca
2.2 abcc

3. Construid un AFD que reconozca el lenguaje, sobre el alfabeto $\Sigma = \{0,1\}$, cuyas palabras cumplen las siguientes restricciones **(1 punto)**:

- Si una palabra tiene menos de 5 unos, entonces tiene un número par de unos
- Si una palabra tiene 5 unos o más, entonces contiene un número impar de unos
- Cualquier palabra contiene al menos un uno

4. Demostrad formalmente, **aplicando técnicas vistas en clase**, para cada uno de los siguientes lenguajes, si se trata de un lenguaje regular, si es un lenguaje independiente del contexto, o si es un lenguaje que no es ni regular ni independiente del contexto **(2 puntos)**:

4.1 $L = \{(ab)^n a^{2m-1} \mid n \geq 1,\ m \geq 2 \text{ y } n + m \geq 4\}$
4.2 $L = \{b^n \# a^m \# c^{n+1} \mid n \geq 1 \text{ y } m \geq n\}$

5. Definid completamente (conjunto de estados, estado inicial, estados finales, alfabeto, alfabeto de la pila, símbolo inicial de pila, y regla de transición), un ADPND que reconozca el siguiente lenguaje **(2 puntos)**:

$$L = \{ a^m b^n a^{m+2n} \mid n, m > 0\}$$

Importante: Escribid la regla de transición en forma de tabla, tal como se ha hecho en clase. Describid, de manera informal, el funcionamiento de vuestro autómata. Todas aquellas soluciones que no contengan una explicación de cómo funciona el ADPND, no serán puntuadas.

5.1 Dad la secuencia de descripciones instantáneas sobre el ADPND diseñado que corresponden a las siguientes palabras:

w_1 = aabaaaa
w_2 = aaabaaaa

3ª Convocatoria

1. Dada la gramática regular G obtened, aplicando métodos de transformación formales presentados en clase, un AFD mínimo que reconozca L(G). ***<u>Importante:</u>*** la solución presentada debe contener los procesos de desarrollo completos de los distintos métodos formales empleados **(2 puntos)**:

   $G = (\{a,b\}, \{S,A,B\}, S, P)$ siendo P:

   P: { $S \rightarrow abA \mid B \mid baB \mid \varepsilon$
   $A \rightarrow bS \mid b$
   $B \rightarrow aS$ }

2. Dado el lenguaje

   $$L = \{a^n w_1 b^{r+s} w_2 a^n \mid w_1, w_2 \in \{a,b\}^*, \mid w_1\mid = r, \mid w_2\mid = s, n \geq 0 \text{ y } r, s \geq 0\}$$

   Se pide:

   2.1. Construid una gramática G que genere el lenguaje L. Explicad brevemente las ideas aplicadas en su construcción. ***<u>Restricción:</u>*** $|N| \leq 3$ **(1 punto)**.

   2.2. Transformad, aplicando transformaciones formales vistas en clase, la gramática G resultante del apartado anterior en otra equivalente y en Forma Normal de Chomsky **(1 punto)** .

3. Definid completamente (conjunto de estados, estado inicial, estados finales, alfabeto, alfabeto de la pila, símbolo inicial de pila, y regla de transición), un ADPND que reconozca el siguiente lenguaje **(2 puntos)**:

   $$L = \{ wxw^I \mid w, x \in \{a,b\}^+\}$$

   Importante: Escribid la regla de transición en forma de tabla, tal como se ha hecho en clase. Describid, de manera informal, el funcionamiento de vuestro autómata.

Todas aquellas soluciones que no contengan una explicación de cómo funciona el ADPND, no serán puntuadas.

4. Demostrad formalmente, **aplicando técnicas vistas en clase**, para cada uno de los siguientes lenguajes, si se trata de un lenguaje regular, si es un lenguaje independiente del contexto, o si es un lenguaje que no es ni regular ni independiente del contexto **(2 puntos)**:

4.1 $L = \{0^i 1^j \mid i > 0 \wedge j \geq 2i\}$

4.2 $L = \{a^i b^j a^i b^j \mid i, j \geq 1\}$