
Lenguajes, Gramáticas y Autómatas Conceptos

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas
C.P.S. Universidad de Zaragoza

Última revisión: Febrero. 2004

Índice

- Alfabetos, palabras y lenguajes
- Operaciones con palabras
- Definiciones relacionadas con las palabras
- Operaciones con lenguajes
- Definiciones relacionadas con los lenguajes

Alfabetos, Palabras y Lenguajes

- Alfabeto: conjunto no vacío y finito de símbolos.

$$\Sigma = \{a, b, c, \dots, z\}, a \in \Sigma$$

- Palabra o Cadena definida sobre un alfabeto: secuencia finita de símbolos de dicho determinado alfabeto.

- Longitud de una cadena w sobre un Σ , $|w|$, número de símbolos que tiene la cadena.
- Todo símbolo del alfabeto es una palabra o cadena sobre dicho alfabeto.
- Palabra vacía, ε , es una palabra sobre cualquier alfabeto.

- Lenguaje: conjunto de palabras.

- Lenguaje vacío, ϕ , es un lenguaje formado por ninguna palabra ($\phi \neq \{\varepsilon\}$).
- Lenguaje Universal o Cerradura de Σ , Σ^* , formado por todas las cadenas sobre Σ .

- Ejemplo: $\Sigma = \{1\}$, $\Sigma^* = \{\varepsilon, 1, 11, 111, \dots\}$

- **PROBLEMA**: ¿Cómo representar todas las palabras de un lenguaje?

Palabras o Cadenas: Operaciones

- Concatenación: sean x , y cadenas sobre Σ , la concatenación de x con y es la cadena z que se obtiene al añadir a la cadena x la palabra y .

□ Notación: $z = xy$, $z = x \cdot y$

Ejemplo: $x = \text{“porta”}$, $y = \text{“equipajes”}$ entonces $z = xy = \text{“portaequipajes”}$

□ Longitud resultante de una concatenación de palabras:

$$|xy| = |x| + |y|$$

□ ε Identidad respecto la concatenación, $|\varepsilon| = 0$

□ Operación no conmutativa, $xy \neq yx$

□ Operación asociativa, $x(yz) = (xy)z$

- Potencia: sea x cadena sobre Σ ,

$$x^n = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } n = 0 \\ xx^{(n-1)} & \text{si } n > 0 \end{cases}, \quad |x^n| = n |x|$$

Palabras o Cadenas: Operaciones (II)

- Inversa o transpuesta: sea x cadena sobre Σ ,

$$x^I = \begin{cases} x & \text{si } x = \varepsilon \\ y^I a & \text{si } x = ay, a \in \Sigma, y \in \Sigma^* \end{cases}$$

- La inversa se “deshace” a sí misma, $(x^I)^I = x$

Palabras o Cadenas: Definiciones

- Dos cadenas x e y son iguales, si tienen la misma longitud y los mismos símbolos en la misma posición. Se denota mediante $x = y$.
- Las nociones de prefijo y sufijo de cadenas sobre un alfabeto son análogas a las que se usan habitualmente. Si x e y son palabras, se dice que y es prefijo de x si para alguna cadena z se obtiene $x = yz$

Ejemplo: $x = 121$ entonces $y = 12$ es prefijo de x porque existe $z = 1$, tal que $x = yz$

Toda palabra puede ser prefija de si misma. Se utiliza el término prefijo propio para denotar aquellas cadenas que son prefijos de una palabra pero no iguales a ella.

Ejemplo: en el ejemplo previo la cadena y es un prefijo propio de la cadena x

La palabra vacía, ϵ , es prefijo de cualquier palabra.

- Una cadena w es una subcadena o subpalabra de otra cadena z si existen las cadenas x e y tal que $z = xwy$

Lenguajes: Operaciones

- Concatenación: dados dos lenguajes A y B,

$$A \cdot B = \{x \cdot y \mid x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Ejemplo: $A = \{\text{casa}\}$, $B = \{\text{pájaro, perro}\}$ entonces

$$A \cdot B = \{\text{casapájaro, casaperro}\}$$

- No es necesario que sean dos lenguajes sobre un mismo alfabeto.
 - Identidad de la operación concatenación de lenguajes es, $A = \{\varepsilon\}$.
- Potencia: sea A un lenguaje sobre Σ ,

$$A^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{si } n = 0 \\ A \cdot A^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

- Inversa: sea A un lenguaje sobre Σ :

$$A^I = \{x^I \mid x \in A\}$$

- La inversa se “deshace” a sí misma, $(A^I)^I = A$

Lenguajes: Operaciones (II)

- Unión: Dados los lenguajes A y B sobre Σ :

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ o } x \in B \}$$

Teorema: Dados los lenguajes A, B y C sobre Σ , se cumple que:

$$1) A \cdot (B \cup C) = A \cdot B \cup A \cdot C$$

$$1) (B \cup C) \cdot A = B \cdot A \cup C \cdot A$$

- Intersección: Dados los lenguajes A y B sobre Σ :

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \in B \text{ simultáneamente} \}$$

- Diferencia: Dados los lenguajes A y B sobre Σ :

$$A - B = \{ x \mid x \in A \text{ y } x \notin B \}$$

- Complemento de un lenguaje A sobre Σ :

$$\bar{A} = \Sigma^* - A$$

Lenguajes: Definiciones

- Igualdad, dos lenguajes A y B sobre Σ se dice que son iguales cuando contienen exactamente las mismas cadenas.

$$A = B$$

Se dice que A es un sublenguaje de B si todas las cadenas de A son también cadenas de B .

$$A \subseteq B$$

- Teorema: Sean A y B dos lenguajes sobre el alfabeto Σ . Entonces $A=B$ si y sólo si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$.
 - Este teorema resulta conveniente en ocasiones para demostrar la igualdad de dos lenguajes

Lenguajes: Definiciones (II)

- Sea A un lenguaje sobre Σ , se define

Cerradura de Kleene o Cerradura de Estrella:

$$A^* = \cup_{n \geq 0} A^n$$

Las cadenas de la cerradura de Kleene se forman al realizar cero o más concatenaciones de las cadenas del lenguaje.

Cerradura Positiva:

$$A^+ = \cup_{n > 0} A^n$$

Las cadenas de la cerradura positiva se forman al realizar una o más concatenaciones de las cadenas del lenguaje.