Estructuras de Datos y Algoritmos

Árboles n-arios de búsqueda

Lección 16

Universidad Zaragoza

1542

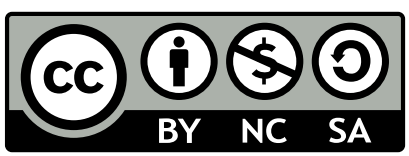
Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2024/2025

Grado en Ingeniería Informática

Universidad de Zaragoza

Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt



Adaptadas de diapositivas de Javier Campos

Índice

Universidad Zaragoza

Índice

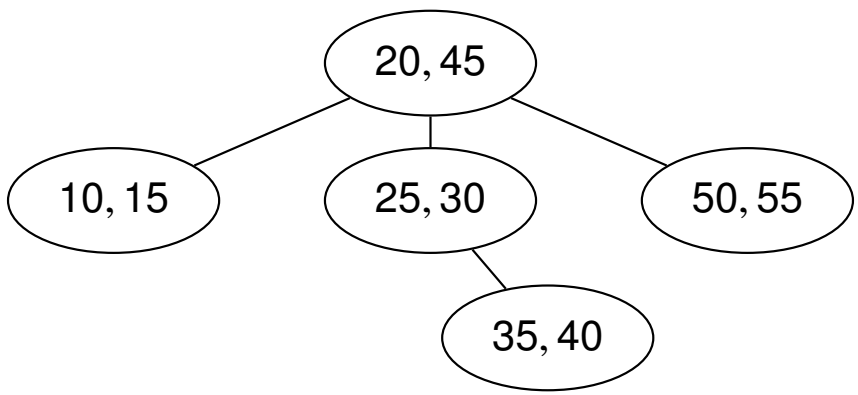
Universidad Zaragoza

Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

Generalización de definición de ABBs

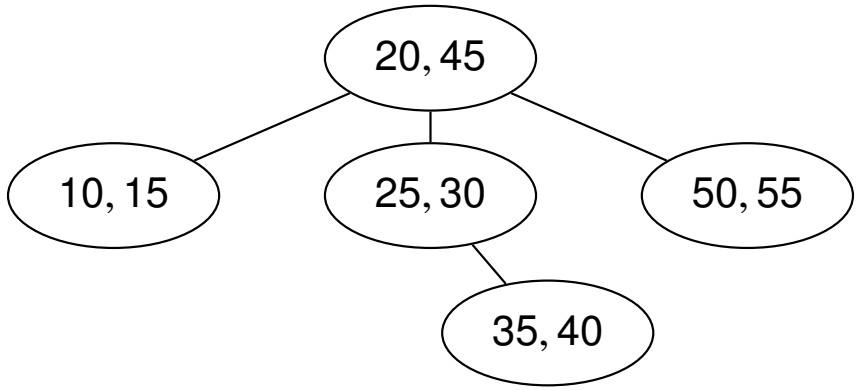
- Los árboles *n*-arios de búsqueda (árboles de búsqueda múltiples o multicamino) son árboles de grado *n* definidos de la forma:
  - Si el árbol A es vacío, entonces es un árbol *n*-ario de búsqueda;
  - Si el árbol A es no vacío, entonces es un árbol *n*-ario de búsqueda si verifica que:
    - **a)** La raíz de A tiene m subárboles *n*-arios de búsqueda $A_1, \ldots A_m$, con $1 \leq m \leq n$;
    - **b)** La raíz de A contiene la siguiente información: $(m, e_1, e_2, \ldots, e_{m-1})$ de forma que $e_{i-1} < e_i$, para $2 \leq i \leq m-1$
    - **c)** Todo elemento e perteneciente al subárbol A_i es tal que $e < e_i$, para $1 \leq i \leq m-1$;
    - **d)** Todo elemento e perteneciente al subárbol A_m es tal que $e > e_{m-1}$



Árbol 3-ario de búsqueda

Árboles n-arios de búsqueda

Definiciones – ejemplo



Ejemplo de búsqueda de elemento e

- Mirar en primer lugar en el interior de la raíz
- Si $e = e_i$, para algún $i \in [1, m-1]$, la búsqueda termina con éxito. Si no, determinar si:
  - $e < e_1$: buscar en el subárbol A_1
  - $e_i < e < e_{i+1}, i \in [1, m-2]$: buscar en el subárbol A_{i+1}
  - $e > e_{m-1}$: buscar en el subárbol A_m
- Si m es grande, la búsqueda entre $e_1, e_2, \ldots, e_{m-1}$ ha de realizarse mediante una búsqueda dicotómica. Para valores pequeños de m, una búsqueda secuencial puede ser más apropiada

Árboles *n*-arios de búsqueda
Definiciones

Dicho de otra forma:

- Los árboles *n*-arios de búsqueda se llaman también *árboles multicamino* (aquéllos en los que cada nodo puede tener más de dos descendientes directos) cuyas ramas están ordenadas “a modo de” un ABB
- En un árbol multicamino, de grado n, cada nodo interno puede tener como máximo n nodos descendientes, y puede almacenar como máximo $n - 1$ claves ordenadas

Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

- Los árboles *n*-arios de búsqueda son especialmente útiles cuando se utilizan en búsquedas externas (los datos almacenados en disco, etcétera, no en memoria), permitiendo reducir así el número de accesos a disco (1 acceso por nodo consultado o nivel del árbol)
- El **coste de la operación de búsqueda es del orden de la altura del árbol**: nos interesará que estos árboles sean lo más equilibrados posible

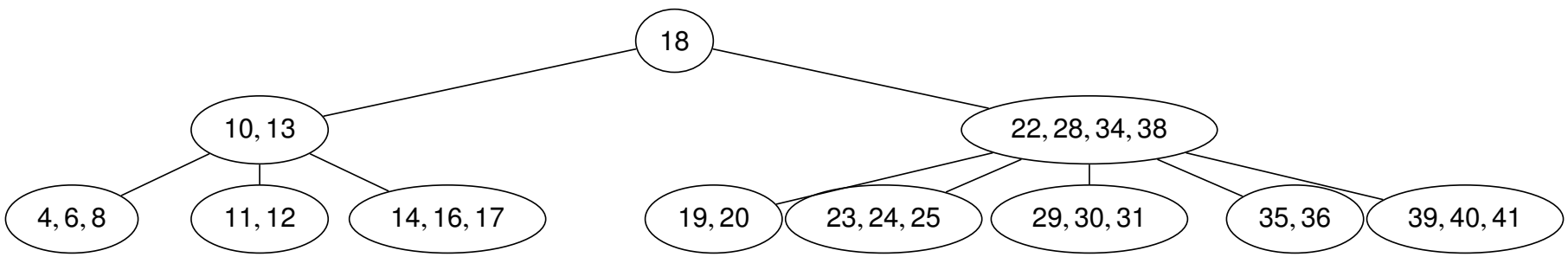
Universidad Zaragoza

Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

Árboles B

- Tipo particular de árboles *n*-arios de búsqueda equilibrados
- La raíz es una hoja o tiene al menos 2 hijos
- Cada nodo, excepto la raíz y las hojas, tiene al menos $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ hijos
- Todas las hojas están en un mismo nivel

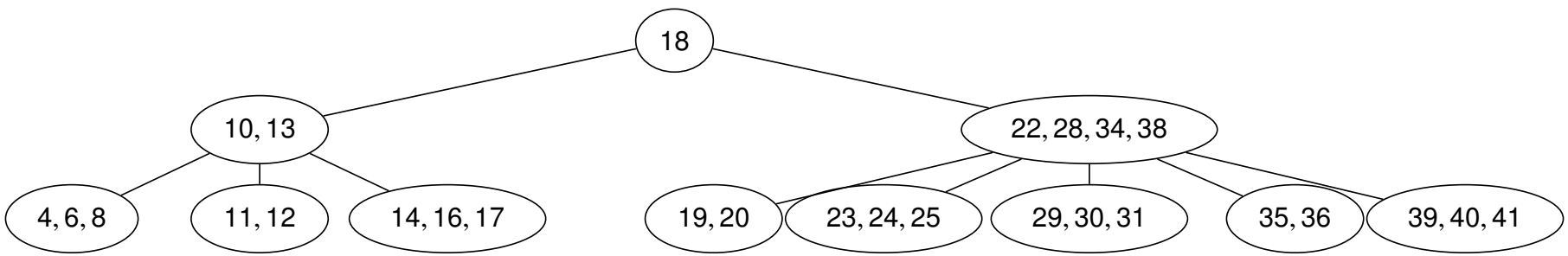


Árbol B de orden 5

Árboles n-arios de búsqueda

Definiciones

- Si hay M hojas y las hojas están en el nivel L:
  - El número de nodos en los niveles 1, 2, 3, ... es por lo menos 2, $2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$, $2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^2$, ...
  - Por tanto: $M \geq 2\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil^{L-1}$
  - Es decir: $L \leq 1 + \log_{\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil} \frac{M}{2}$
- Es decir, **la altura está acotada por el logaritmo del número de claves**



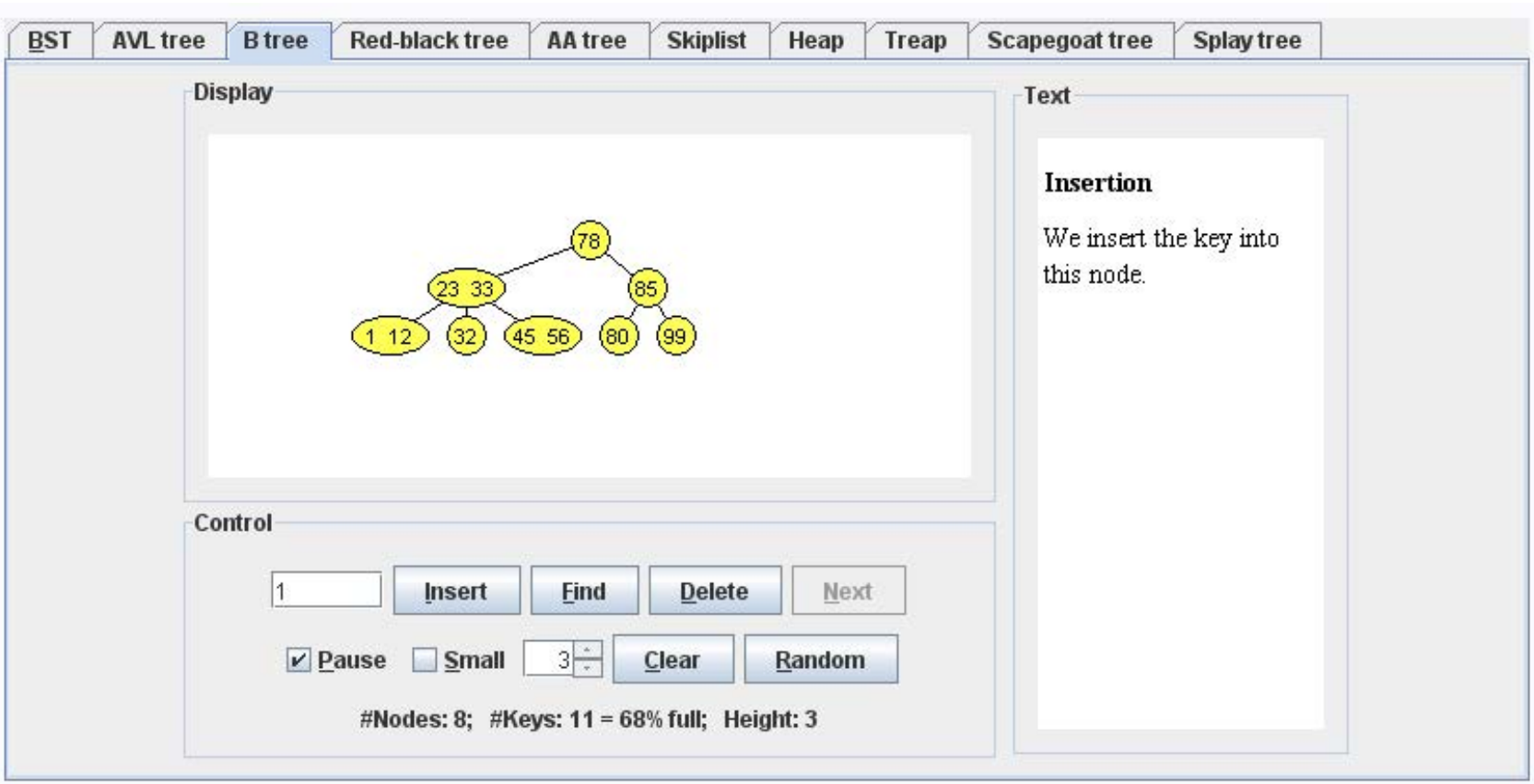
Árboles *n*-arios de búsqueda
Definiciones

- Búsqueda, inserción y borrado en árboles B:
  - Algoritmos descritos (por ejemplo) en el libro de la bibliografía de la asignatura de L. Joyanes et al. (capítulo 10)
- Los árboles B de orden 3 se denominan también **árboles 2-3**:
  - Cada nodo, excepto las hojas, tiene 2 o 3 hijos

Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

- Applet que permite visualizar paso a paso las operaciones sobre árboles B (y otros tipos de árboles)
  - http://people.ksp.sk/~kuko/bak/



Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

- Otra clase de árboles *n*-arios de búsqueda es la de los **árboles B***
- Un **árbol B* de orden n** (*n*-ario), se define como:
  - Todo nodo, excepto la raíz, tiene como mucho n hijos
  - Cada nodo de un árbol B* de orden n, excepto la raíz y las hojas, tiene como mínimo $\left\lceil \frac{2n-1}{3} \right\rceil$ hijos
  - La raíz de un árbol B* de orden n tiene como mínimo 2 y como máximo $2\left\lfloor \frac{2n-2}{3} \right\rfloor + 1$ hijos
    - *Según la definición dada en el libro de Knuth (vol. 3, pág. 488), la raíz puede llegar a tener 4/3 del grado*
  - Todas las hojas de un árbol B* de orden n están en un mismo nivel
  - Un nodo interno que tenga k hijos, contendrá $k-1$ claves

Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

Árboles B*

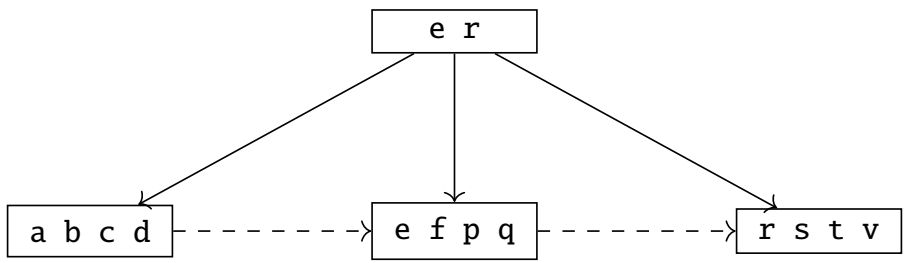
- Mejora de árboles B para aumentar el promedio de utilización de los nodos:
  - La inserción de claves en el árbol B* supone que si el nodo que le corresponde está lleno, se mueven las claves a uno de sus hermanos
    - Así se pospone la división del nodo hasta que ambos hermanos están completamente llenos
  - Cuando finalmente se dividan, esos dos hermanos pasarán a ser 3, y cada uno estará lleno en 2/3 partes de su capacidad

Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

Árboles B+

- Otra mejora de los árboles B
  - Mantienen la propiedad de acceso rápido en búsquedas para claves cualquiera,
  - Permiten un recorrido secuencial rápido
- Todas las claves se encuentran en las hojas, duplicándose en la raíz y en los nodos interiores aquellas que definen los caminos de búsqueda
  - Las claves en el nodo raíz e interiores se utilizan únicamente como índices
  - Para facilitar el recorrido secuencial rápido, las hojas están encadenadas (*enhebradas*)

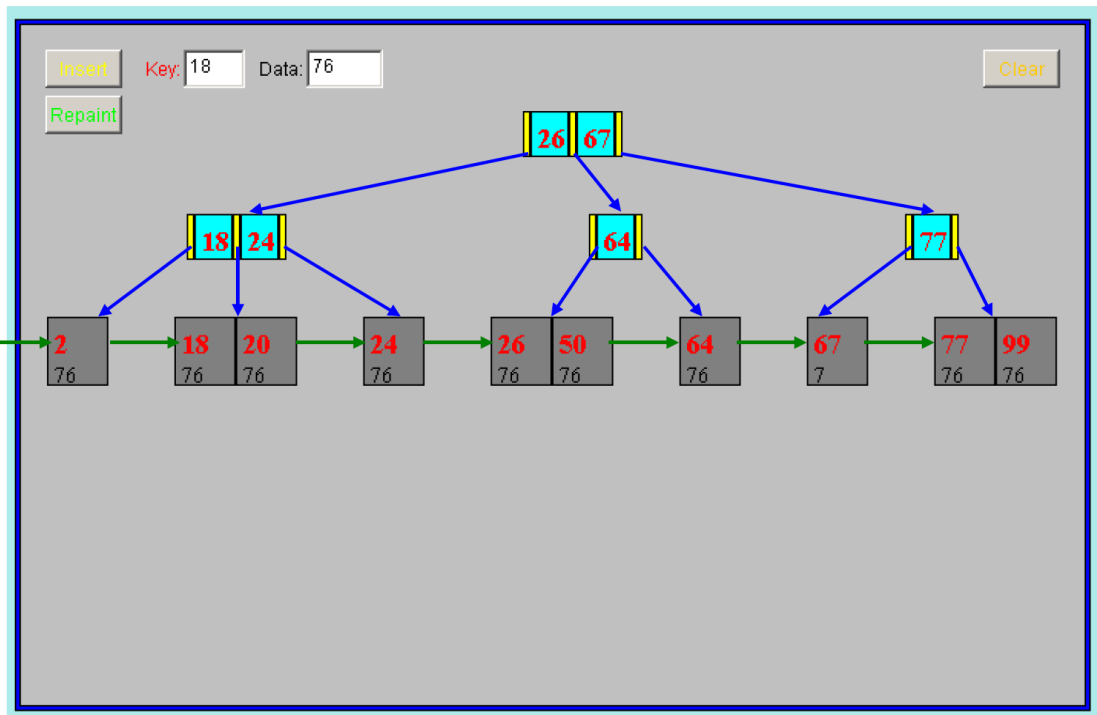


Árboles *n*-arios de búsqueda

Definiciones

Árboles B+

- Applet en
  https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/BPlusTree.html
- Ejemplo de árbol B+ construido con dicho applet (se han añadido las flechas ↙ ↙)



Índice

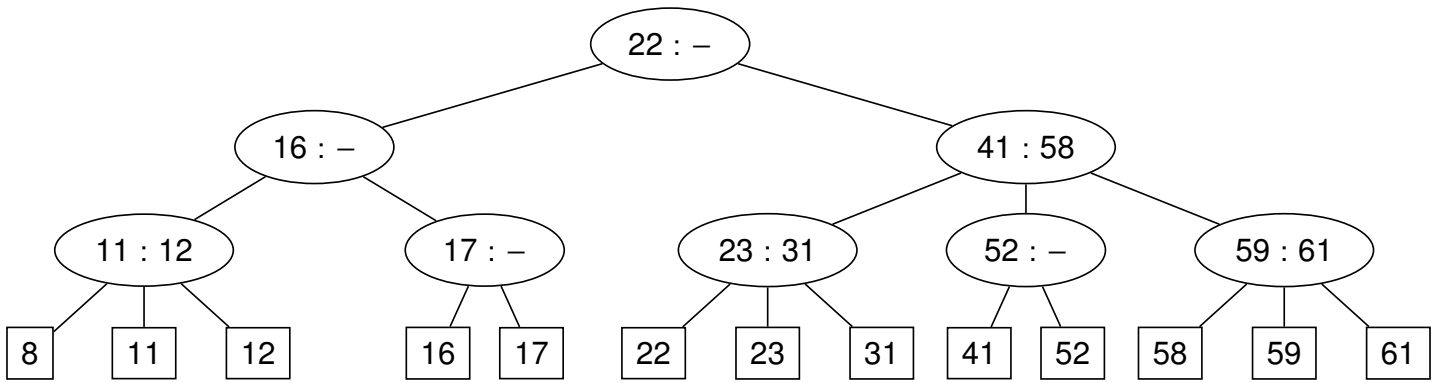
Universidad Zaragoza

Árboles *n*-arios de búsqueda

Ejemplo: árboles 2-3

- Árboles B de grado 3, pero “al estilo de” los B+:
  - Las claves se guardan únicamente en las hojas
  - Los nodos internos son las copias de las claves necesarias para hacer la búsqueda

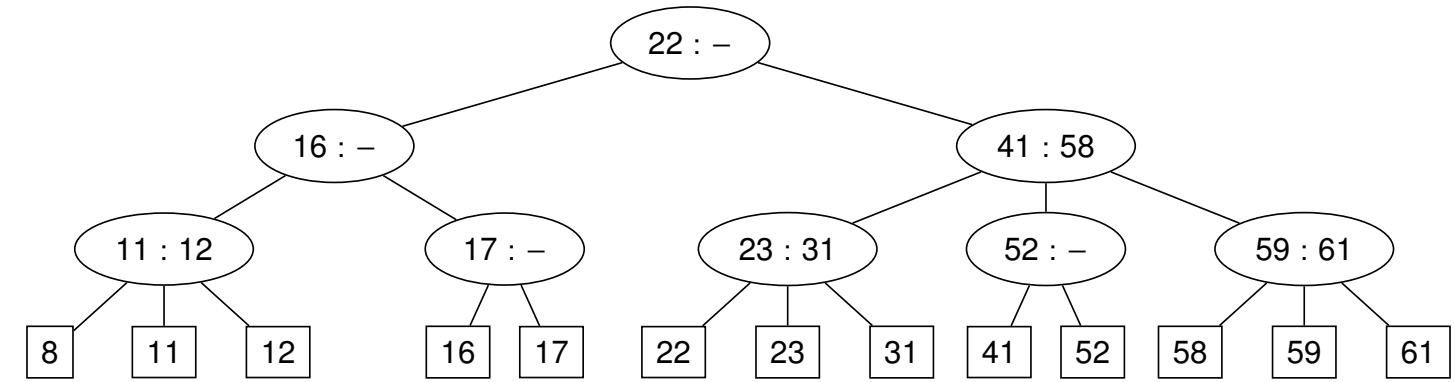
Ejemplo de inserción en árboles 2-3

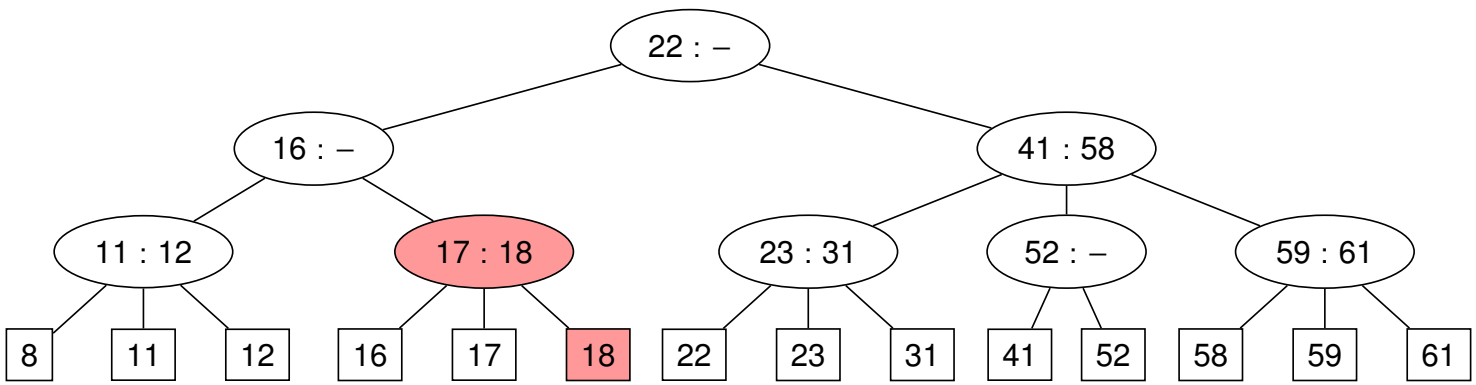


Árbol 2-3 de partida

Árboles *n*-arios de búsqueda

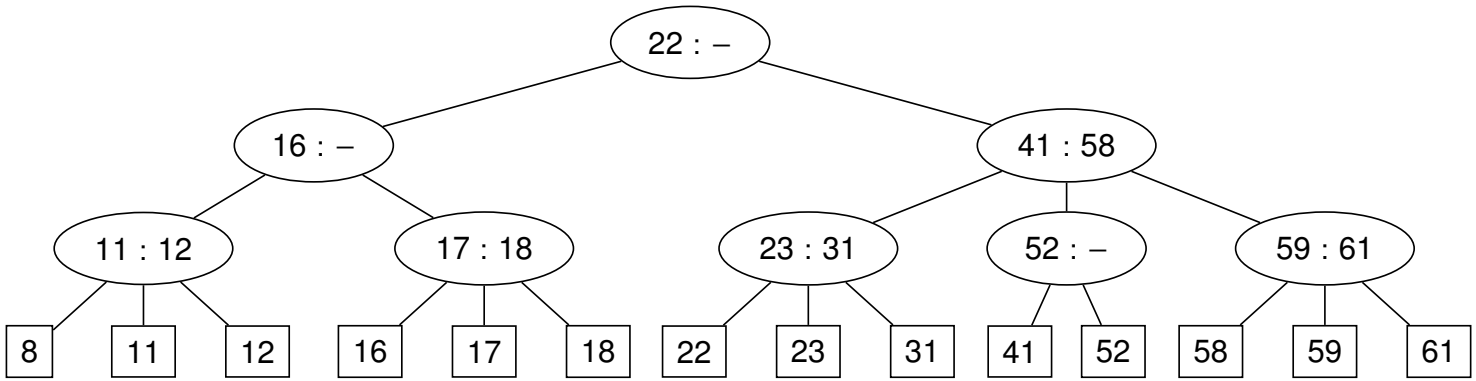
Ejemplo: árboles 2-3 – Primera inserción: elemento 18

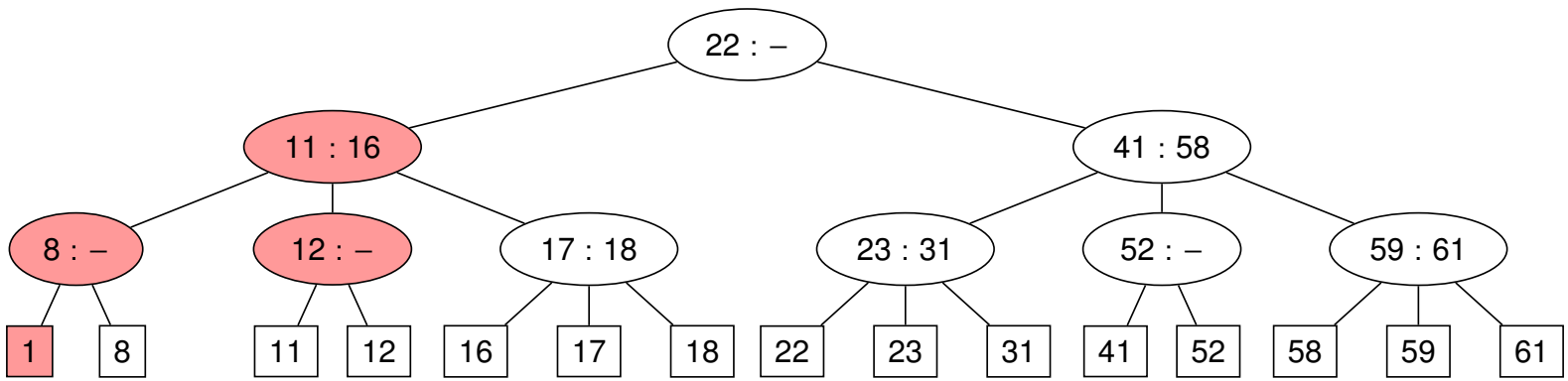




Árboles *n*-arios de búsqueda

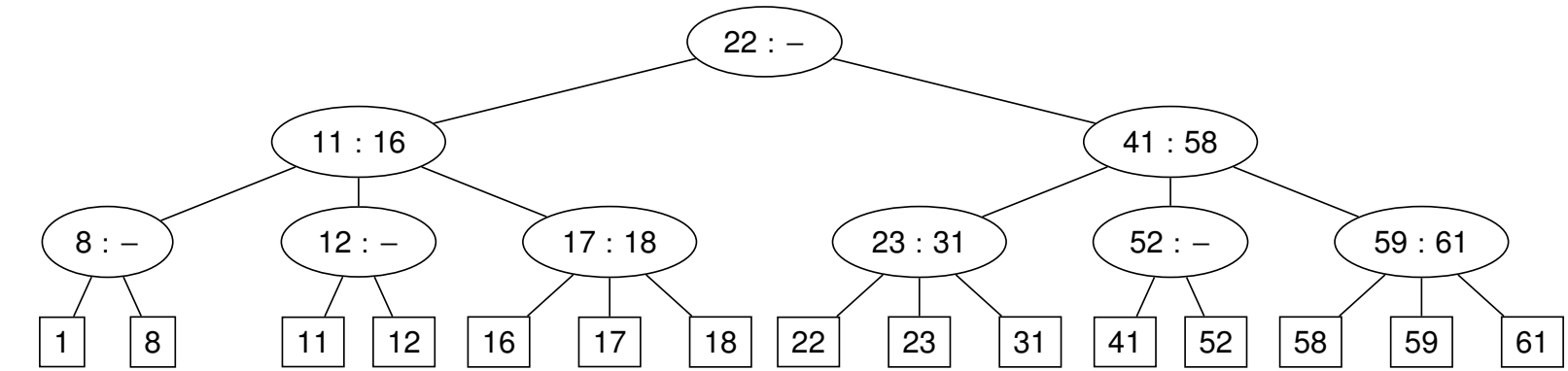
Ejemplo: árboles 2-3 – Segunda inserción: elemento 1

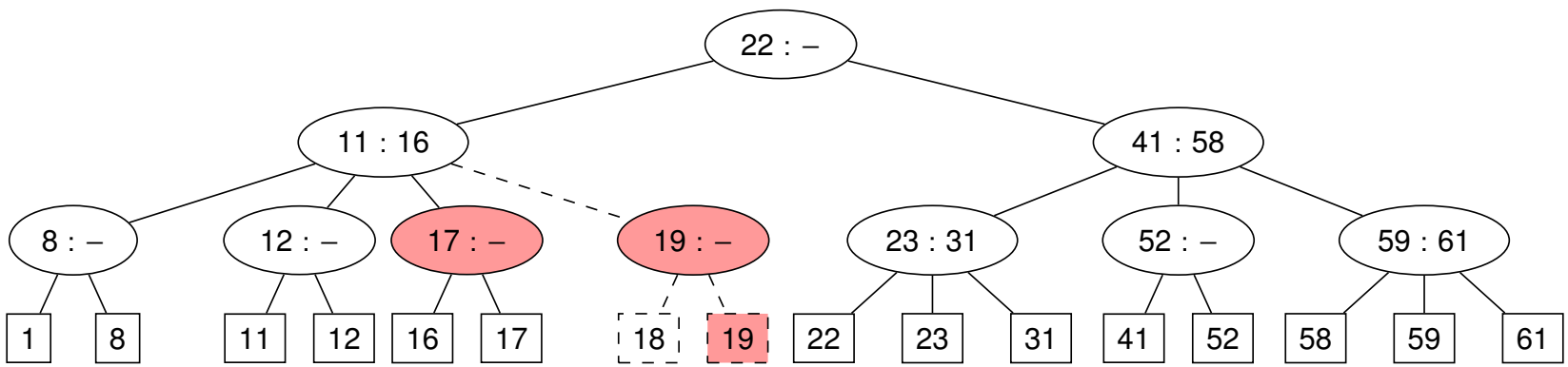




Árboles *n*-arios de búsqueda

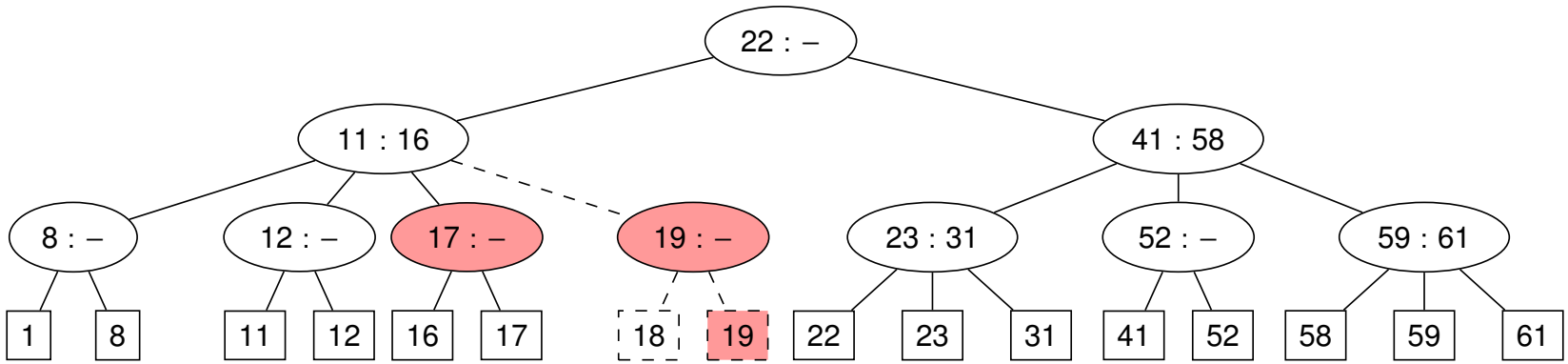
Ejemplo: árboles 2-3 – Tercera inserción: elemento 19

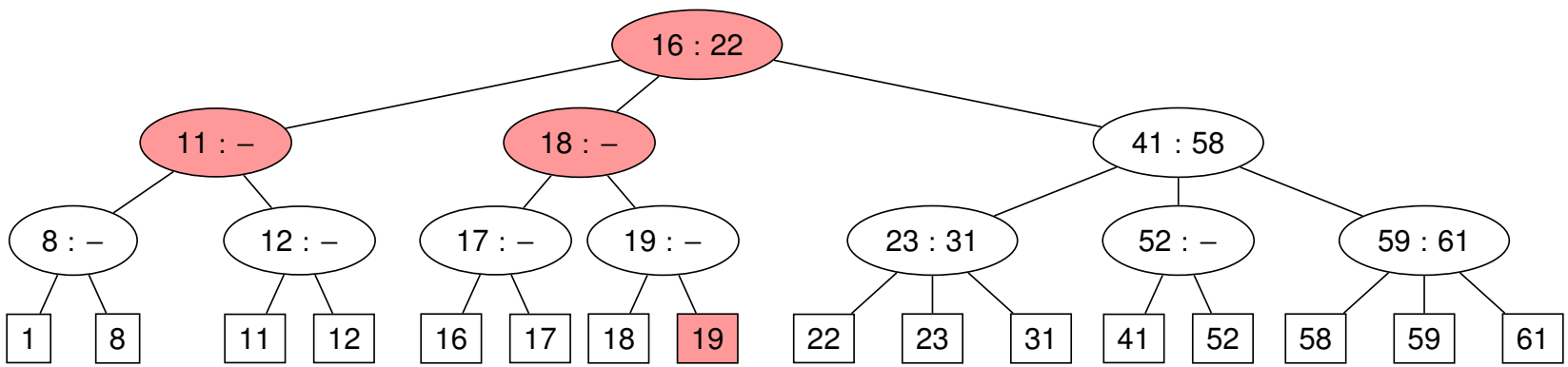




Árboles *n*-arios de búsqueda

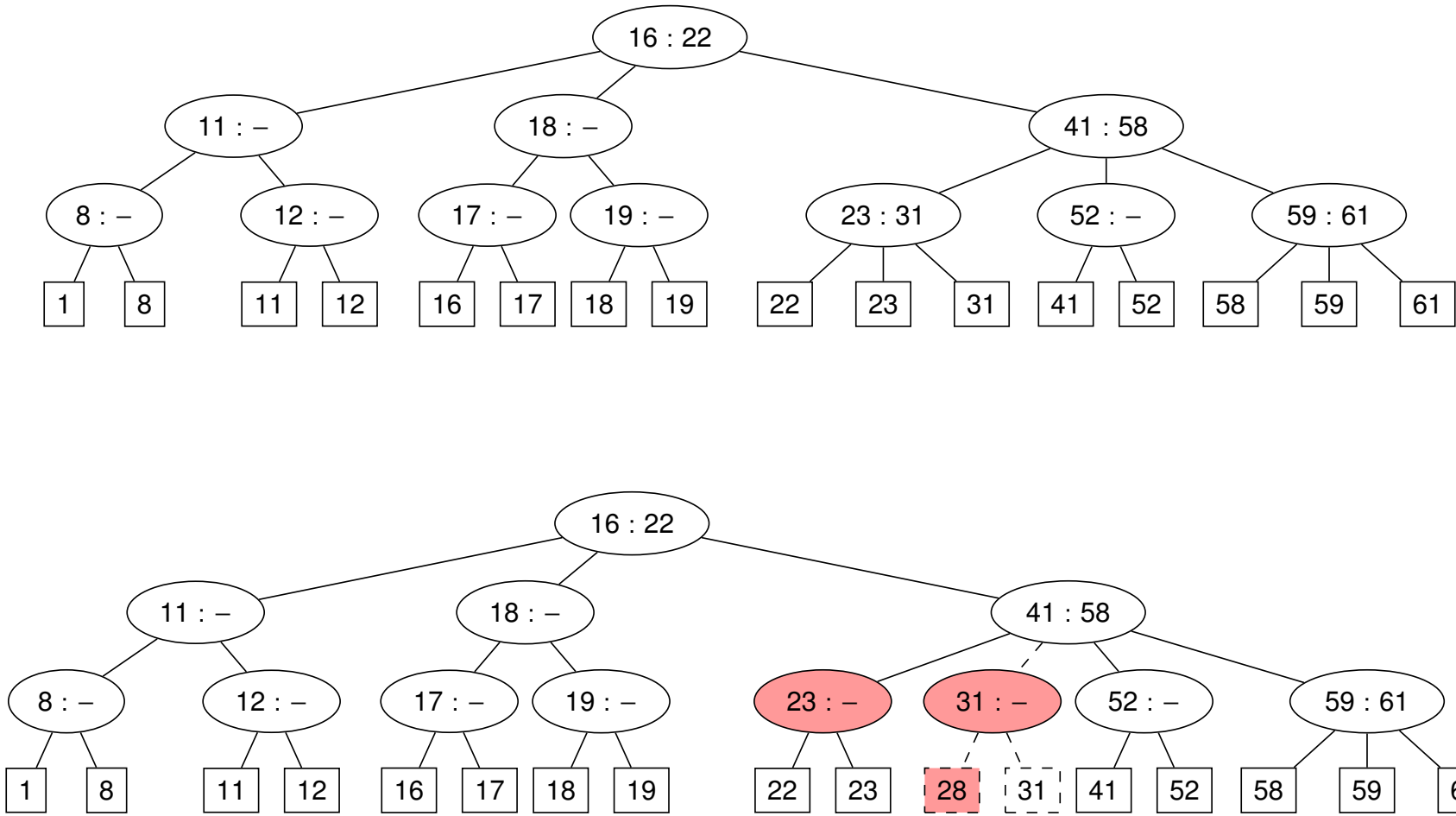
Ejemplo: árboles 2-3 – Tercera inserción: elemento 19 *(continuación)*





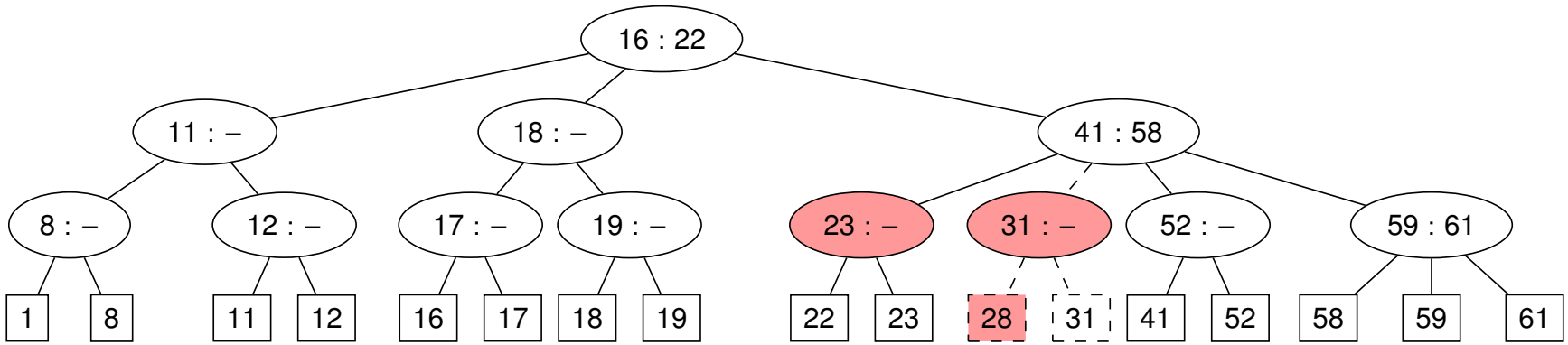
Árboles *n*-arios de búsqueda

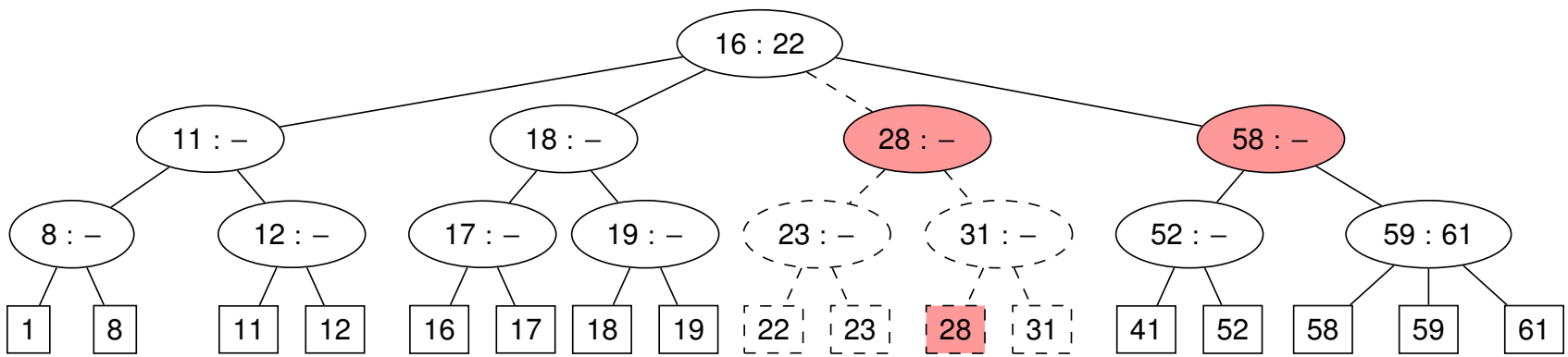
Ejemplo: árboles 2-3 – Cuarta inserción: elemento 28



Árboles *n*-arios de búsqueda

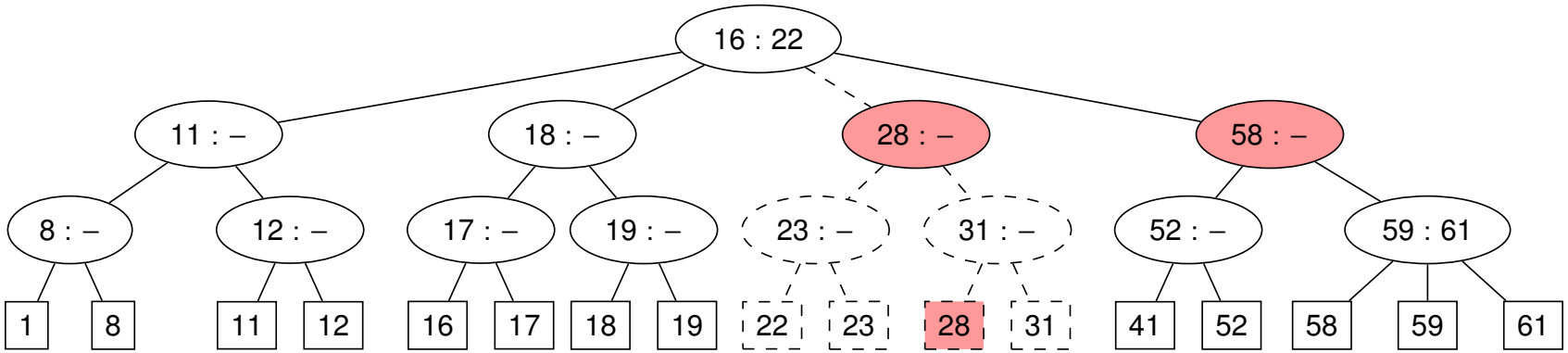
Ejemplo: árboles 2-3 – Cuarta inserción: elemento 28 *(continuación)*

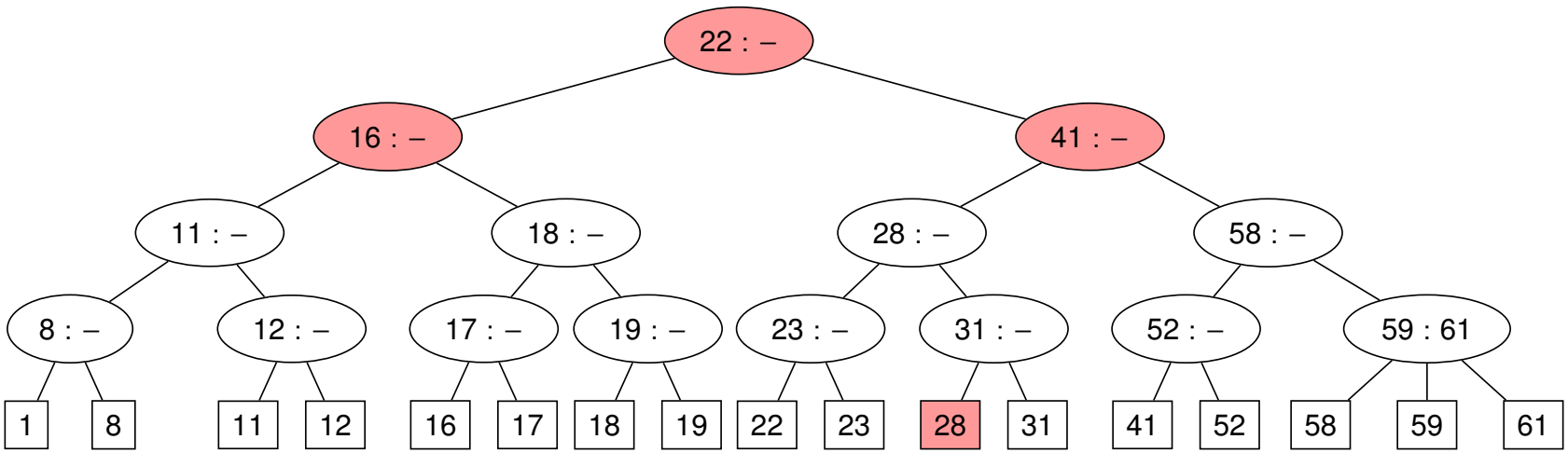




Árboles *n*-arios de búsqueda

Ejemplo: árboles 2-3 – Cuarta inserción: elemento 28 *(final)*





Índice

Universidad Zaragoza

Implementación de árboles 2-3

Estructura de datos

```
tipos
    tipo_elmto    = registro
                        clave: tipo_clave;
                        ... {el resto de campos necesarios}
                    freg;
    tipos_nodo    = (hoja, interior);
    diccionario   = ↑nodo_dos_tres;
    nodo_dos_tres = registro
                        clase: tipos_nodo;
                        {el siguiente campo sólo se usa si clase = hoja}
                        elmto: tipo_elmto;
                        {los siguientes campos sólo se usan si clase = interior}
                        primer_hijo, segundo_hijo, tercer_hijo: diccionario;
                        menor_de_segundo, menor_de_tercero: tipo_clave
                    freg
```

Implementación de árboles 2-3

Operación `inserta`

```
procedimiento inserta(ent x: tipo_elmto; e/s S: diccionario)
variables
    pt_atrás: diccionario; {puntero al nuevo nodo devuelto por inserta1}
    menor_atrás: tipo_clave; {valor mínimo en el subárbol de pt_atrás}
    guardaS: diccionario {para almacenar una copia temporal de S}
principio
    {prueba si S está vacío o si hay un solo nodo, y debe
    incluirse un procedimiento de inserción apropiado}
    ...
    insertaRec(S, x, pt_atrás, menor_atrás);
    si pt_atrás ≠ nil entonces
        {crea la raíz nueva; sus hijos están ahora apuntados por S y pt_atrás}
        guardaS := S;
        nuevoDato(S);
        S↑.primer_hijo := guardaS;
        S↑.segundo_hijo := pt_atrás;
        S↑.menor_de_segundo := menor_atrás;
        S↑.tercer_hijo := nil
    fsi
fin
```

Implementación de árboles 2-3

Operación `insertaRec` – primera aproximación (esquema)

```
procedimiento insertaRec(e/s nodo: diccionario;
                         ent x: tipo_elmto; {x se insertará en el subárbol de nodo}
                         sal pt_nuevo: diccionario; {puntero al nodo recién creado a la derecha de nodo}
                         sal menor: tipo_clave) {elemento más pequeño del subárbol al que apunta pt_nuevo}
principio
    pt_nuevo := nil;
    si nodo es una hoja entonces
        si x no es el elemento que está en nodo entonces
            Crea un nodo nuevo apuntado por pt_nuevo;
            Pone x en el nodo nuevo;
            menor := x.clave
        fsi
    sino {nodo es un nodo interno}
        Sea w el hijo de nodo a cuyo subárbol pertenece x;
        insertaRec(w, x, pt_atrás, menor_atrás);
        si pt_atrás ≠ nil entonces
            Inserta el puntero pt_atrás entre los hijos de nodo justo a la derecha de w;
            si nodo tiene cuatro hijos entonces
                Crea un nodo nuevo apuntado por pt_nuevo;
                Da al nuevo nodo los hijos 3º y 4º de nodo;
                Ajusta menor_de_segundo y menor_de_tercero en nodo y el nodo nuevo;
                Coloca menor como la menor clave entre los hijos del nodo nuevo
            fsi
        fsi
    fsi
fin
```

Implementación de árboles 2-3

Operación `insertaRec` – primera aproximación (detalles)

```
procedimiento insertaRec(e/s nodo: diccionario;
                         ent x: tipo_elmto; { x se insertará en el subárbol de nodo }
                         sal pt_nuevo: diccionario; { puntero al nodo recién creado a la derecha de nodo }
                         sal menor: tipo_clave) { elemento más pequeño del subárbol al que apunta pt_nuevo }

variables
    pt_atrás: diccionario;
    menor_atrás: tipo_clave;
    hijo: 1..3; { indica qué hijo de nodo se sigue en la llamada recursiva
                  (relacionado con la variable w del esquema anterior) }
    w: diccionario { puntero al hijo }
principio
    pt_nuevo := nil;
    si nodo↑.clase = hoja entonces
        si nodo↑.elmto.clave↑ ≠ x.clave entonces
            { crea una hoja nueva que contiene x.clave y "devuelve" este nodo }
            nuevoDato(pt_nuevo);
            pt_nuevo↑.clase := hoja;
            si nodo↑.elmto.clave < x.clave entonces
                { pone x en el nuevo nodo a la dcha del nodo actual }
                pt_nuevo↑.elmto := x;
                menor := x.clave
            sino { x está a la izquierda del elemento en el nodo actual }
                pt_nuevo↑.elmto := nodo↑.elmto;
                nodo↑.elmto := x;
                menor := pt_nuevo↑.elmto.clave
            fsi
        fsi
    sino {nodo es un nodo interno}
...
```

```
...
    sino { nodo es un nodo interno }
        { selecciona el hijo de nodo que se debe seguir }
        si x.clave < nodo↑.menor_de_segundo entonces
            hijo := 1;
            w := nodo↑.primer_hijo
        sino
            si (nodo↑.tercer_hijo = nil) or (x.clave < nodo↑.menor_de_tercero) entonces
                { x está en el segundo subárbol }
                hijo := 2;
                w := nodo↑.segundo_hijo
            sino { x está en el tercer subárbol }
                hijo := 3;
                w := nodo↑.tercer_hijo
            fsi
        fsi;
        insertaRec(w, x, pt_atrás, menor_atrás);
        si pt_atrás ≠ nil entonces
            { debe insertarse un nuevo hijo de nodo }
            si nodo↑.tercer_hijo = nil entonces { nodo tiene 2 hijos, así que
                        se inserta el nuevo en el lugar adecuado }
                si hijo = 2 entonces
                    nodo↑.tercer_hijo := pt_atrás;
                    nodo↑.menor_de_tercero := menor_atrás
                sino {hijo=1}
                    nodo↑.tercer_hijo := nodo↑.segundo_hijo;
                    nodo↑.menor_de_tercero := nodo↑.menor_de_segundo;
                    nodo↑.segundo_hijo := pt_atrás;
                    nodo↑.menor_de_segundo := menor_atrás
                fsi
            sino { nodo ya tiene tres hijos }
...
```

```
...
            sino {nodo ya tiene tres hijos}
                nuevoDato(pt_nuevo);
                pt_nuevo↑.clase := interior;
                si hijo = 3 entonces
                    { pt_atrás y el tercer hijo se convierten en hijos del nuevo nodo }
                    pt_nuevo↑.primer_hijo := nodo↑.tercer_hijo;
                    pt_nuevo↑.segundo_hijo := pt_atrás;
                    pt_nuevo↑.tercer_hijo := nil;
                    pt_nuevo↑.menor_de_segundo := menor_atrás;
                    {menor_de_tercero está indefinido para pt_nuevo}
                    menor := nodo↑.menor_de_tercero;
                    nodo↑.tercer_hijo:=nil
                sino { hijo ≤ 2; pasa el 3º hijo de nodo a pt_nuevo }
                    pt_nuevo↑.segundo_hijo := nodo↑.tercer_hijo;
                    pt_nuevo↑.menor_de_segundo := nodo↑.menor_de_tercer;
                    pt_nuevo↑.tercer_hijo := nil;
                    nodo↑.tercer_hijo := nil
                fsi;
                si hijo = 2 entonces
                    {pt_atrás se convierte en el 1º hijo de pt_nuevo}
                    pt_nuevo↑.primer_hijo := pt_atrás;
                    menor := menor_atrás
                sino_si hijo =1 entonces
                    { el segundo hijo de nodo pasa a pt_nuevo;
                    pt_atrás se convierte en el 2º hijo de nodo }
                    pt_nuevo↑.primer_hijo := nodo↑.segundo_hijo;
                    menor := nodo↑.menor_de_segundo;
                    nodo↑.segundo_hijo := pt_atrás;
                    nodo↑.menor_de_segundo := menor_atrás
                fsi
            fsi
        fsi
    fsi
fin
```

Implementación de árboles 2-3

Esquema de borrado

```
procedimiento borra(e/s d: diccionario; ent clave: tipo_clave)
variables
    unHijo: booleano;
    pAux: ptNodo;
    menor: tipo_clave
principio
    si el diccionario tiene 0 o 1 elemento entonces
        hacer el borrado de esos casos especiales
    sino { el diccionario tiene más de un elemento }
        borraRec(d.nodos, clave, unHijo, menor);
        si unHijo entonces { la raíz sólo tiene un hijo }
            eliminar la raíz y hacer que d sea el único hijo de d
        fsi
    fsi
fin
```

Implementación de árboles 2-3

Esquema de borrado

```
procedimiento borraRec(e/s p: ptNodo; ent clave: tipo_clave;
                       sal unHijo: booleano; sal menor: tipo_clave)
{ borra 'clave' de 'p'; si 'p' se queda con un solo hijo devuelve verdad en 'unHijo';
si 'clave' es la menor de p entonces 'menor' devuelve la siguiente clave mas pequeña de p }
variables
    soloUno: booleano;
    w: ptNodo;
    hijo: natural
principio
    unHijo := falso;
    si los hijos de p son hojas entonces
        si la clave a borrar es el primer hijo de p entonces
            Se borra y se desplaza el segundo hacia la izquierda;
            Se actualiza el valor de 'menor' con el nuevo primer hijo;
            si ahora p tiene un solo hijo entonces
                unHijo := verdad
            sino
                Se desplaza el tercero hacia su izquierda
            fsi
        sino_si la clave a borrar es el segundo hijo de p entonces
            Se borra;
            si ahora p tiene un solo hijo entonces
                unHijo := verdad
            sino
                Se desplaza el tercero hacia su izquierda
            fsi
        sino_si la clave a borrar es el tercer hijo de p entonces
...
```

```
...
        sino_si la clave a borrar es el tercer hijo de p entonces
            Se borra
        fsi
        sino { los hijos de p no son hojas }
            { se selecciona el hijo de p en que hay que borrar }
            si puede estar en el primer subárbol entonces
                hijo := 1;
                w := primer hijo de p
            sino_si puede estar en el segundo subárbol entonces
                hijo := 2;
                w := segundo hijo de p
            sino { puede estar en el tercer subárbol }
                hijo := 3;
                w := tercer hijo de p
            fsi;
            borraRec(w, clave, soloUno, menor);
            si soloUno entonces
                { arreglar los hijos de p para que ninguno tenga menos de dos hijos }
                si hijo = 1 entonces {el primer hijo de p sólo tiene un hijo}
                    si el segundo hijo de p tiene tres hijos entonces
                        Se pasa el 1º hijo del 2º de p a 2º hijo del 1º de p
                    sino {el segundo hijo de p tiene dos hijos}
                        Se pasa el hijo del 1º de p como 1º hijo del 2º de p
                        Se elimina el primer hijo de p
                        si ahora p sólo tiene un hijo entonces
                            unHijo := verdad
                        fsi
                    fsi
            sino_si hijo = 2 entonces {el 2º hijo de p sólo tiene un hijo}
...
```

```
...
            sino_si hijo = 2 entonces { el 2º hijo de p sólo tiene un hijo }
                si el primer hijo de p tiene tres hijos entonces
                    Se pasa el 3º hijo del 1º de p como 1º hijo del 2º de p
                    si se ha borrado la clave menor del 2º hijo de p entonces
                        Se actualiza con el valor 'menor' el campo adecuado
                    sino {no ha cambiado la clave menor de 2º hijo de p}
                        No se usa el valor 'menor'
                    fsi
                sino_si el 3º hijo de p existe y tiene tres hijos entonces
                    Se pasa el 1º hijo del 3º de p como 2º del 2º de p
                    si se ha borrado la menor clave del 2º hijo de p entonces
                        Se actualiza con el valor 'menor' el campo adecuado
                    fsi
                sino { ningún otro hijo de p tiene tres hijos }
                    El único hijo del 2º de p pasa a ser el 3º del 1º de p
                    si se ha borrado la menor clave del 2º hijo de p entonces
                        Se actualiza con el valor 'menor' el campo adecuado
                    sino
                        No se usa el valor 'menor'
                    fsi;
                    si p se ha quedado con un solo hijo entonces
                        unHijo := verdad
                    fsi
                fsi
            sino { hijo=3; el tercer hijo de p solo tiene un hijo }
...
```

```
...
            sino { hijo = 3; el tercer hijo de p solo tiene un hijo }
                si el segundo hijo de p tiene tres hijos entonces
                    Se pasa el 3º hijo del 2º de p como 1º del 3º de p
                    si se ha borrado la menor clave del 3º hijo de p entonces
                        Se actualiza con el valor 'menor' el campo adecuado
                    sino
                        no se usa el valor 'menor'
                    fsi
                sino { el segundo hijo de p tiene dos hijos }
                    El único hijo del 3º de p pasa como 3º del 2º de p
                    si se ha borrado la menor clave del 3º hijo de p entonces
                        Se actualiza con el valor 'menor' el campo adecuado
                    sino
                        No se usa el valor 'menor'
                    fsi
                fsi
            fsi
        sino { soloUno = falso; todos los hijos de p tienen 2 o 3 hijos }
            Cambiar, si hace falta, los campos que guardan la menor clave del segundo
            y del tercer subárbol de p
        fsi
    fsi
fin
```

Trabajo encargado

Leer lección 16 de los apuntes de la asignatura

Estructuras de Datos y Algoritmos

Árboles n-arios de búsqueda

Lección 16

Universidad Zaragoza

1542

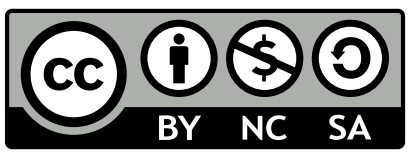
Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2024/2025

Grado en Ingeniería Informática

Universidad de Zaragoza

Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt



Adaptadas de diapositivas de Javier Campos