

# Estructuras de Datos y Algoritmos

## Colas con prioridad, montículos y *heapsort*

### LECCIÓN 18

© All wrongs reversed – bajo licencia CC-BY-NC-SA 4.0



**Universidad**  
Zaragoza

Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas  
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2023/2024

**Grado en Ingeniería Informática**  
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

*Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt*



Adaptadas de diapositivas de Javier Campos

# Índice

1 Colas con prioridad

2 Montículos

3 *Heapsort*

# Índice

1 Colas con prioridad

2 Montículos

3 *Heapsort*

# Colas con prioridad

## Concepto

- Se pueden añadir elementos en cualquier orden
- Los elementos se extraen por orden según su prioridad
- “Cola de espera”, pero el valor de cada elemento establece su “prioridad” (por ejemplo, el máximo valor significa máxima prioridad)
  - El primero en salir es el elemento de mayor prioridad
  - Ejemplo: cola en los servicios de urgencia en hospitales
- Elementos de cualquier tipo, con relación de orden total para el campo que exprese la “prioridad”
- Puede ser **cola con prioridad de mínimos** o **cola con prioridad de máximos**

## TAD cola con prioridad

- Colección de elementos con prioridad, con (al menos) las operaciones:
  - Inserción de *un* elemento
  - Observación de *un* elemento de valor máximo<sup>1</sup> (= máxima prioridad)
  - Eliminación de *un* elemento con valor máximo<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup>Cola con prioridad de máximos

# Colas con prioridad

espec colasConPrioridadesDeMáximos

parámetro formal

género elem

operación  $\leq$ : elem e1, elem e2 -> booleano

*{ $\leq$  es una relación de orden total,  $a \leq b$  significa que b tiene más prioridad que a}*

fpf

género cp {Colección de elementos con prioridad}

operaciones

crear: -> cp

*{Devuelve una cola vacía, sin elementos}*

añadir: cp c, elem e -> cp

*{Devuelve la cola resultante de añadir el elemento e a la cola c}*

esVacía?: cp c -> booleano

*{Devuelve verdad si y sólo si c no tiene elementos}*

parcial máx: cp c -> elem

*{Devuelve un elemento máximo de c.*

*Parcial: la operación no está definida si c es vacía}*

eliminarMáx: cp c -> cp

*{Si c es vacía, devuelve c. Si no, devuelve una cola igual a la resultante de eliminar de c un elemento máximo.}*

fespec

*Cola de máximos  
(si tomamos  $\geq$  tendríamos de mínimos)*

# Colas con prioridad

## Implementaciones

- Lista no ordenada:
  - añadir, crear y esVacía? con coste constante
  - máx y eliminarMáx con coste lineal
- Lista ordenada (de mayor a menor):
  - añadir con coste lineal
  - máx, eliminarMáx, esVacía? y crear con coste constante
- Árbol AVL:
  - añadir, máx y eliminarMáx, coste  $O(\log N)$
  - esVacía? y crear, con coste constante
- **Montículo** (*heap*):
  - Implementación eficiente para colas con prioridad (**se representa en memoria estática, con un vector**)

# Índice

1 Colas con prioridad

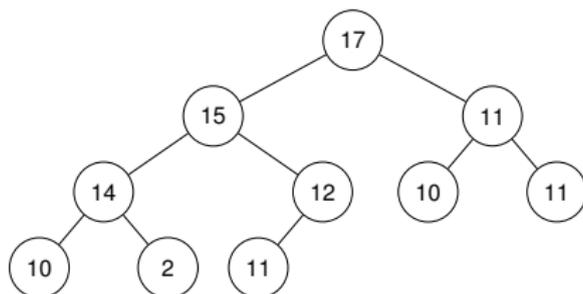
**2 Montículos**

3 *Heapsort*

# Montículos

## Definiciones

- Un árbol binario se dice *parcialmente ordenado* si verifica las siguientes propiedades (**propiedad del montículo**):
  - El elemento raíz es mayor o igual<sup>2</sup> que el resto de los elementos del árbol, y
  - Los subárboles izquierdo y derecho son árboles binarios parcialmente ordenados



---

<sup>2</sup>Árbol parcialmente ordenado “de máximos” (la versión “de mínimos” es análoga).

# Montículos

## Definiciones

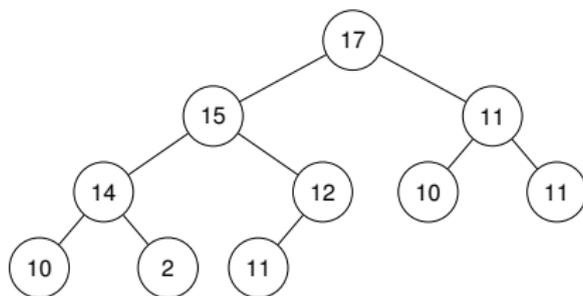
- Un árbol  $n$ -ario se dice **homogéneo** si todos sus subárboles, excepto las hojas, tienen  $n$  hijos
- Un árbol es **completo** cuando es homogéneo y todas sus hojas tienen la misma profundidad
- Un árbol se dice **casi-completo** (también llamado **semicompleto**) cuando se puede obtener a partir de un árbol completo eliminando hojas consecutivas del último nivel, comenzando por la que está más a la derecha

# Montículos

## Definiciones

**Montículo de máximos**: árbol binario casicompleto donde

- El elemento raíz es mayor o igual que todos los elementos en el hijo izquierdo y en el derecho, y
- Ambos hijos son a su vez montículos de máximos



- La definición “de mínimos” es análoga
- Un applet que permite construir montículos tanto de mínimos como de máximos: <http://people.ksp.sk/~kuko/bak/>

## ■ Representación de la cola con prioridades como un montículo:

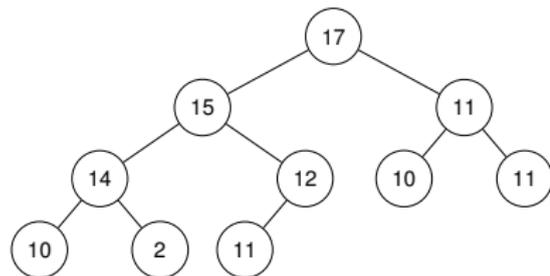
- Operaciones crear,  $\text{máx}$  y  $\text{esVacia?}$ , serán de coste constante
- Operaciones añadir y eliminar  $\text{Máx}$ : requieren recorrer un camino desde la raíz hasta una hoja (o a la inversa)
  - Como el montículo es casi-completo, su altura es de orden logarítmico en el número de elementos del árbol
  - Por tanto, se podrá garantizar un coste de ese orden, en el caso peor, para añadir y eliminar  $\text{Máx}$

# Montículos

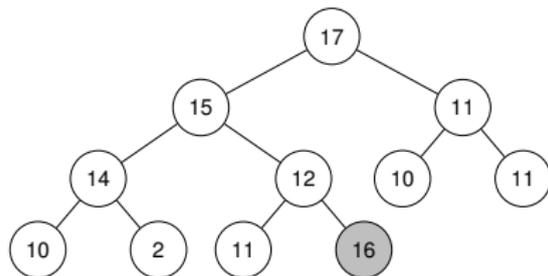
## Operación añadir

*Pasos para añadir un nuevo elemento en un montículo:*

- 1 Se coloca el nuevo elemento lo más a la derecha posible en el nivel más bajo



Inserción de un nuevo elemento (de prioridad 16)



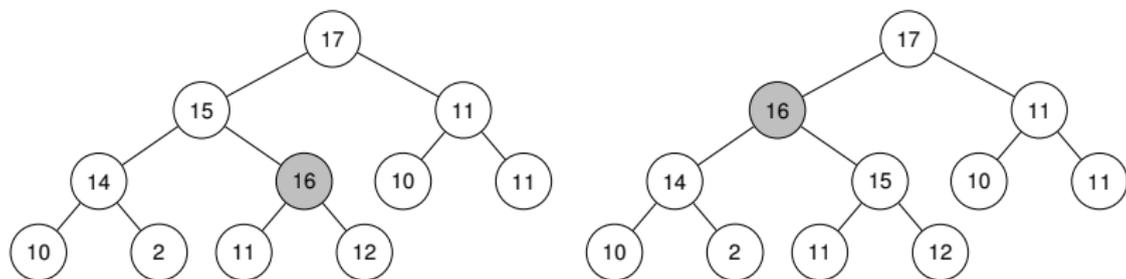
Paso 1: se coloca como siguiente hoja

# Montículos

## Operación añadir

*Pasos para añadir un nuevo elemento en un montículo:*

- 2 Si el nuevo elemento es mayor que su padre, se intercambian; y se repite este proceso (comparar con el padre e intercambiar si es mayor) hasta llegar a la raíz o alcanzar una posición en que sea menor o igual que su padre



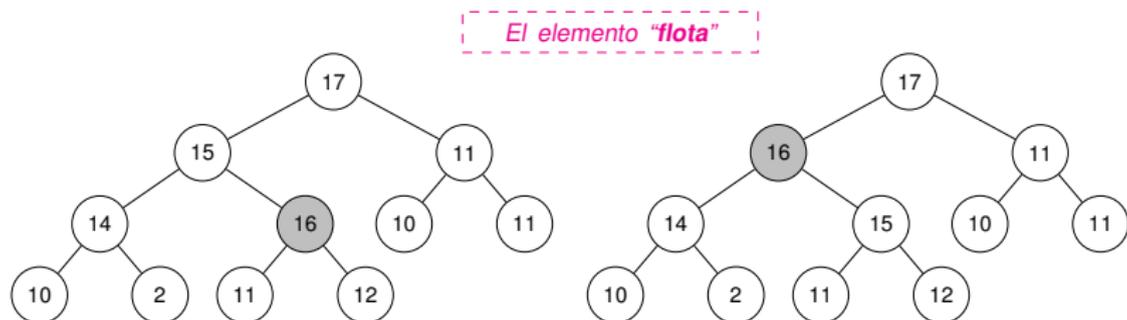
Paso 2: el elemento va subiendo hasta ser menor o igual (en prioridad) que su padre

# Montículos

## Operación añadir

Añadir un nuevo elemento en un montículo:

- Si es posible:
  - Acceder a la que será la posición de la nueva hoja con coste  $O(1)$ ; y
  - Acceder desde cualquier elemento a su padre con coste  $O(1)$
- Entonces el tiempo de la inserción es proporcional a la distancia que el nuevo elemento debe ascender en el árbol, que está acotada por  $\log(N)$ , siendo  $N$  el número de elementos del árbol

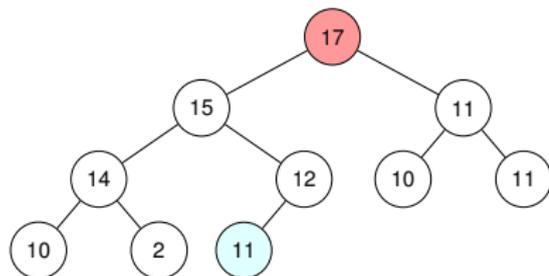


Paso 2: el elemento va subiendo hasta ser menor o igual (en prioridad) que su padre

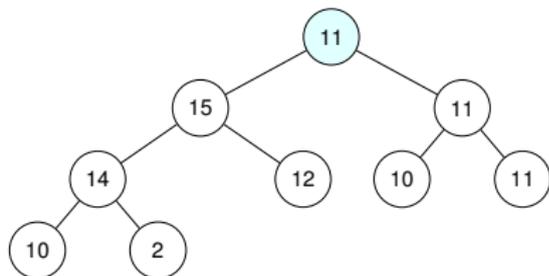
# Montículos

## Operación eliminarMáx

- El máximo elemento del montículo está en la raíz
- Pasos a seguir:
  - 1 Tomar la hoja de más a la derecha, del nivel más bajo del árbol, y colocarla provisionalmente en la raíz sustituyendo al previo máximo



Borrado del elemento máximo



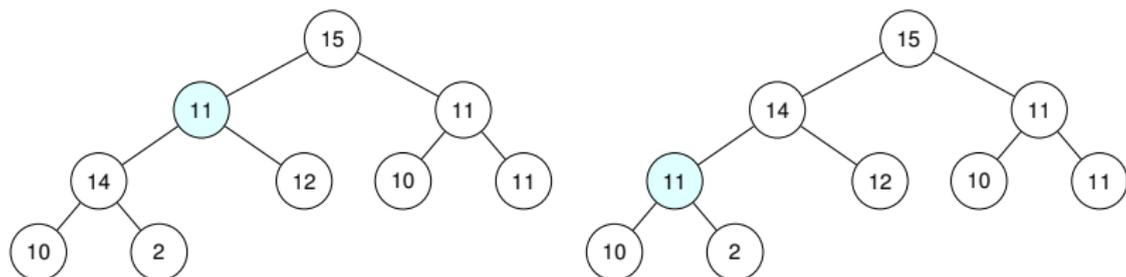
Paso 1: la hoja última pasa a ser raíz

# Montículos

## Operación eliminarMáx

### ■ Pasos a seguir:

- 2 El nuevo elemento en la raíz se compara con sus hijos y, si es menor que ellos (uno o ambos) se intercambia con el mayor de ellos; se repite el proceso de comparar con los hijos e intercambiar, hasta que esté en una hoja o sus hijos sean menores o iguales que el elemento



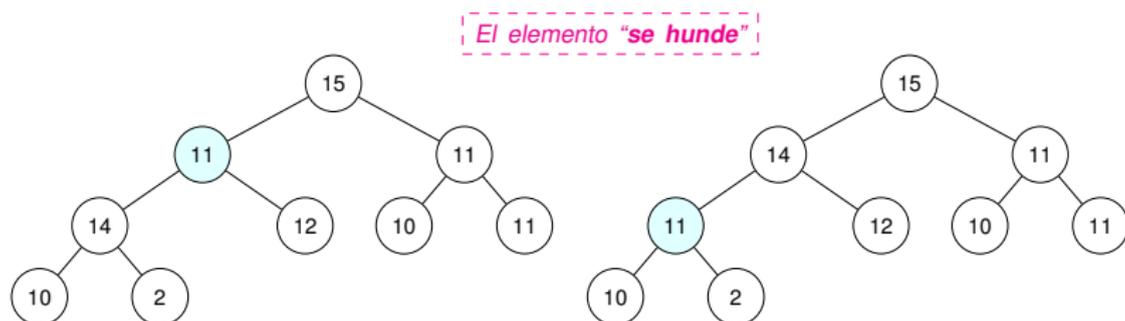
Paso 2: la raíz va bajando hasta alcanzar la posición adecuada

# Montículos

## Operación `eliminarMáx`

### *Eliminar el máximo elemento en un montículo:*

- El número máximo de operaciones a realizar para suprimir el máximo elemento de un árbol de  $N$  nodos es del orden de  $\log(N)$  (que es el número de niveles del árbol)
  - Si es posible acceder a la última hoja con coste  $O(1)$ , y acceder desde cualquier elemento a sus hijos con coste  $O(1)$



Paso 2: la raíz va bajando hasta alcanzar la posición adecuada

# Montículos

## Implementación

### ■ Representación estática para montículos basada en un vector

- Al tratarse de un árbol binario casi-completo, esta representación es eficiente

```
constante  maxNum = ...
tipo      montículo = registro
                    dato: vector[1..maxNum] de elemento;
                    num: 0..maxNum {número de elementos en el montículo}
                    freg
```

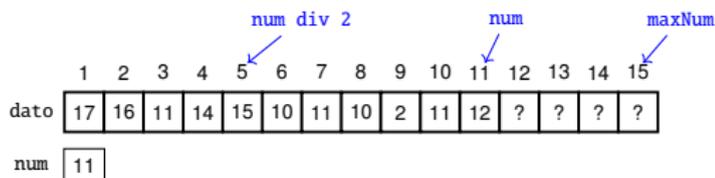
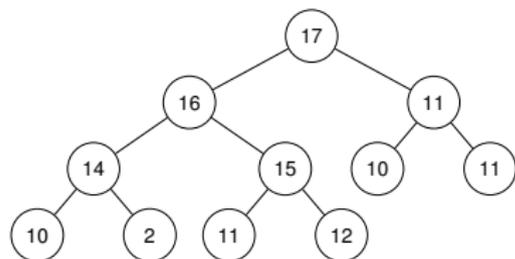
### Características de la representación

- Montículo vacío si  $num = 0$
- La raíz, si existe ( $num > 0$ ), se almacena en  $dato[1]$
- El hijo izquierdo de  $dato[i]$  estará en  $dato[2*i]$ , y el hijo derecho en  $dato[2*i + 1]$ , si existen ( $num \leq 2*i$ , o  $num \leq 2*i + 1$ )
- El padre del  $dato[i]$  estará en  $dato[i \text{ div } 2]$ , si existe ( $i > 1$ )
- La operación de añadir será implementada como parcial (vector lleno...)

# Montículos

## Implementación

- Los nodos del árbol se almacenan por niveles, de arriba a abajo y de izquierda a derecha en cada nivel



- Propiedad:** si el montículo tiene  $\text{num}$  elementos, entonces los primeros  $\text{num} \div 2$  son nodos internos en el montículo, y el resto son hojas

# Montículos

## Implementación

```
módulo colaConPrioridadesDeMáximos
```

```
importa defTipoElem
```

```
exporta
```

```
  constante maxNum {número máximo de elementos de la cola}
```

```
  tipo cp {representación del TAD cola con prioridades}
```

```
  procedimiento crear(sal c: cp)
```

```
  {devuelve una cola vacía, sin elementos}
```

```
  procedimiento añadir(e/s c: cp; ent e: elem; sal error: booleano)
```

```
  {si número de elementos(c) < maxNum entonces error = falso y añade e a c;  
  si no error = verdad}
```

```
  función esVacía?(c: cp) devuelve booleano
```

```
  {devuelve verdad si y sólo si c es la cola vacía}
```

```
  función máx(c: cp) devuelve elem
```

```
  {Pre: esVacía?(c) = falso}
```

```
  {Post: devuelve un elemento máximo de c}
```

```
  procedimiento eliminarMáx(e/s c: cp)
```

```
  {Si c es vacía, sigue igual. Si no, elimina de c su elemento máximo actual}
```

```
implementación
```

```
  constante maxNum = ...
```

```
  tipo          cp = registro
```

```
    dato: vector[1..maxNum] de elemento;
```

```
    num: 0..maxNum {número de elementos en el montículo}
```

```
  freg
```

```
...
```

```

...
procedimiento crear(sal c: cp)
principio
    c.num := 0
fin

procedimiento añadir(e/s c: cp; ent e: elem; sal error: booleano)
variables
    i: natural;
    debeSubir: booleano;
    aux: elem
principio
    si c.num = maxNum entonces
        error := verdad
    sino
        error := falso;
        c.num := c.num + 1;
        c.dato[c.num] := e;
        i := c.num; {índice de la posición actual de e}
        {inicio de "flotar" }
        si i > 1 entonces
            debeSubir := c.dato[i] > c.dato[i div 2]
        sino {i = 1}
            debeSubir := falso
        fsi;
    mientrasQue debeSubir hacer
        {subir e en el árbol, intercambiándolo con su padre}
        aux := c.dato[i];
        c.dato[i] := c.dato[i div 2];
        c.dato[i div 2] := aux;
        i := i div 2; {índice de la pos actual de e}
        si i > 1 entonces
            debeSubir := c.dato[i] > c.dato[i div 2]
        sino {i=1}
            debeSubir := falso
        fsi
    fmq
    { fin de "flotar" }
    fsi
fin

```

...

```

...
procedimiento eliminarMáx(e/s c: cp)
variables
  i, j: natural;
  aux: elem
principio
  si c.num > 0 entonces
    c.dato[1] := c.dato[c.num];
    c.num := c.num - 1;
    i := 1;
    {i es el índice de la posición actual del que antes era el último elemento}
    {inicio de "hundir" }
    mientrasQue i ≤ c.num div 2 hacer
      {bajar el anterior último elem del árbol}
      si (2*i = c.num) orElse (c.dato[2*i] > c.dato[2*i + 1]) entonces
        j := 2*i
      sino
        j := 2*i + 1
      fsi; {j=hijo de i con mayor prioridad, o único hijo}
      si c.dato[i] < c.dato[j] entonces
        {intercambia el anterior último elem y su hijo}
        aux := c.dato[i];
        c.dato[i] := c.dato[j];
        c.dato[j] := aux;
        i := j
      sino
        i := c.num {para salir del bucle}
      fsi
    fmq
  { fin de "hundir" }
  fsi
fin

función máx(c: cp) devuelve elem
{recordar... Pre: esVacia?(c) = falso}
principio
  devuelve c.dato[1]
fin

función esVacia?(c: cp) devuelve booleano
principio
  devuelve c.num = 0
fin
fin {de colaConPrioridadesDeMáximos}

```

# Montículos

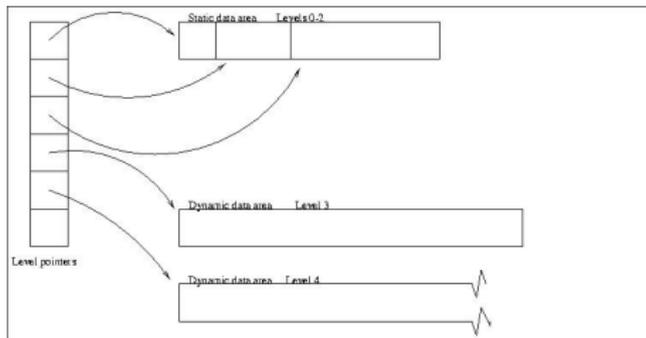
## Problemas de la implementación estática

- Para poder usarla es necesario tener al menos una estimación del tamaño máximo que puede alcanzar el montículo (necesario para definir el vector)
- Coste en memoria muy elevado y no ajustado al tamaño real del montículo
- La operación `añadir` no podrá realizarse si el vector está lleno

# Montículos

## Problemas de la implementación estática

- Para poder usarla es necesario tener al menos una estimación del tamaño máximo que puede alcanzar el montículo (necesario para definir el vector)
- Coste en memoria muy elevado y no ajustado al tamaño real del montículo
- La operación `añadir` no podrá realizarse si el vector está lleno



## ■ Montículos dinámicos o flexibles:

- Consulta más detalles sobre los montículos dinámicos [en este enlace](#)
- **OJO:** La solución propuesta en el dibujo sigue teniendo una capacidad máxima limitada y sus problemas

# Índice

1 Colas con prioridad

2 Montículos

3 *Heapsort*

# Heapsort

- *¿Qué coste temporal en el caso peor tienen los algoritmos de ordenación de vectores que conocéis?*

# Heapsort

- ¿Qué coste temporal en el caso peor tienen los algoritmos de ordenación de vectores que conocéis?
- ¿Qué coste temporal en el caso peor tendría este algoritmo?

```
procedimiento ordena(e/s v: vector[1..maxNum] de elemento; ent n: 1..maxNum)
  {Precondición: n>0.
  Postcondición: Permuta los n primeros datos de v, dejándolos en orden creciente.}
  variables
    t: titi;
    i: entero
  principio
    crear(t); {un titi vacío}
    para i := 1 hasta n hacer {copia los datos de v en t}
      añadir(t, v[i])
    fpara;
    para i := n descendiendo hasta 1 hacer
      {extrae los datos ordenados de t, de mayor a menor}
      v[i] := max(t);
      eliminarMax(t)
    fpara
  fin
```

¿Qué TAD es el titi?

# Heapsort

- La disminución del número de operaciones necesarias para ordenar el vector se debe a la duplicación en memoria utilizada (TAD  $\tau_i \tau_i$ )

# Heapsort

- La disminución del número de operaciones necesarias para ordenar el vector se debe a la duplicación en memoria utilizada (TAD  $\tau_i \tau_i$ )
- Puede modificarse el algoritmo para trabajar sobre el mismo vector a ordenar
  - Procedimientos auxiliares: intercambiar y empujar

# Heapsort

```
procedimiento intercambia(e/s v: vector[1..maxNum] de elemento; ent i, j: 1..maxNum)
  {Intercambia los valores de v[i] y v[j]}
```

```
variable
  aux: elem
principio
  aux := v[i];
  v[i] := v[j];
  v[j] := aux
```

```
fin
```

```
procedimiento empuja(e/s v: vector[1..maxNum] de elemento; ent pri, ult: 1..maxNum)
  {Pre: v[pri],...,v[ult] satisfacen la propiedad de montículo excepto, quizá,
  que los hijos de v[pri] pueden ser mayores que él}
```

```
variables
```

```
  r: entero {r indicará la posición 'actual' de v[pri]}
```

```
principio
```

```
  r := pri;
```

```
  mientrasQue r ≤ ult div 2 hacer
```

```
    si ult = 2*r entonces {r tiene un hijo en 2*r=ult}
```

```
      si v[r] < v[2*r] entonces
```

```
        intercambia(v, r, 2*r)
```

```
      fsi;
```

```
      r := ult {fuerza la terminación del bucle}
```

```
  sino {r tiene dos hijos, en 2*r y 2*r+1}
```

```
    si (v[r] < v[2*r]) and (v[2*r] ≥ v[2*r+1]) entonces {intercambia r con su hijo izq}
```

```
      intercambia(v, r, 2*r);
```

```
      r := 2*r
```

```
  sino
```

```
    si (v[r] < v[2*r + 1]) and (v[2*r + 1] > v[2*r]) entonces {intercambia r con su hijo dch}
```

```
      intercambia(v, r, 2*r + 1);
```

```
      r := 2*r + 1
```

```
    sino {r no viola la propiedad de montículo}
```

```
      r := ult {para forzar la terminación del bucle}
```

```
  fsi
```

```
fsi
```

```
fsi
```

```
fmq {Post: permuta los elementos v[pri]..v[últ] para que TODOS, }
```

```
fin { v[pri] incluido, verifiquen la propiedad del montículo }
```

# Heapsort

```
procedimiento heapsort(e/s v: vector[1..maxNum] de elemento; ent n: 1..maxNum)
{Precondición:  $n > 0$ .
Postcondición: Permuta los  $n$  primeros datos de  $v$ , dejándolos en orden creciente.}
variables
    i:entero
principio
    para i := n div 2 descendiendoHasta 1 hacer
        empuja(v, i, n)
    fpara; {ahora v es un montículo de máximos}
    para i := n descendiendoHasta 2 hacer
        {elimina el máximo de la raíz del montículo}
        intercambia(v, 1, i);
        empuja(v, 1, i - 1) {restablece el montículo hasta la posición i - 1}
    fpara
fin
```

**Coste en tiempo  $O(n \log n)$  en caso peor**

# Estructuras de Datos y Algoritmos

## Colas con prioridad, montículos y *heapsort*

### LECCIÓN 18

© All wrongs reversed – bajo licencia CC-BY-NC-SA 4.0



Universidad  
Zaragoza

Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas  
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2023/2024

Grado en Ingeniería Informática  
UNIVERSIDAD DE ZARAGOZA

*Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt*

