Estructuras de Datos y Algoritmos

Árboles n-arios

Lección 15

Universidad Zaragoza

1542

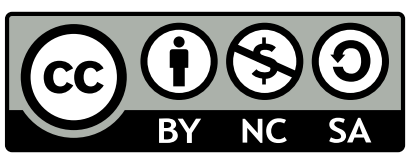
Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2023/2024

Grado en Ingeniería Informática

Universidad de Zaragoza

Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt



Adaptadas de diapositivas de Javier Campos

Índice

Universidad Zaragoza

Índice

Universidad Zaragoza

Árboles *n*-arios

Conceptos, definiciones y terminología básica

Árbol

- Conjunto de elementos de un mismo tipo (denominados *nodos*) que pueden representarse en un **grafo no orientado, conexo y acíclico** en el que existe un vértice destacado denominado *raíz*
  - Por lo general, es una estructura jerárquica
- *Definición recursiva*:
  - Un árbol *n*-ario (con $n \geq 1$) es un conjunto no vacío de elementos del mismo tipo tal que:
    - Existe un elemento destacado llamado raíz del árbol
    - El resto de los elementos se distribuyen en m subconjuntos disjuntos ($0 \leq m \leq n$), llamados subárboles del árbol original, cada uno de los cuales es a su vez un árbol *n*-ario

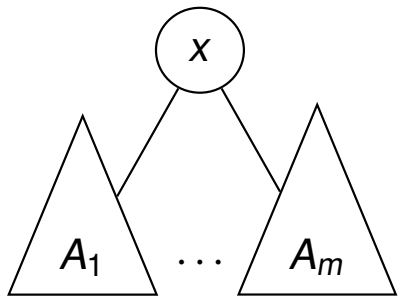
Universidad Zaragoza

Árboles *n*-arios

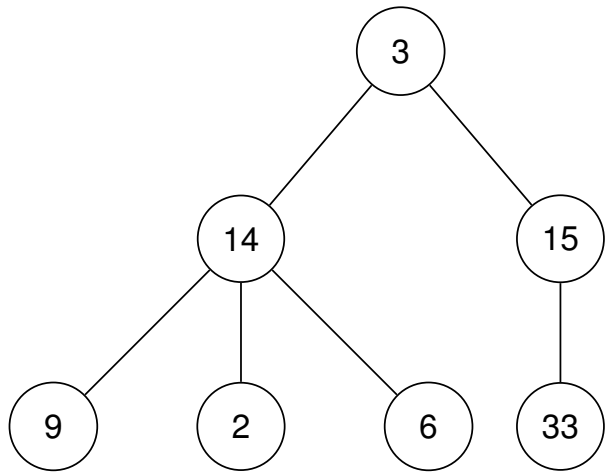
Conceptos, definiciones y terminología básica

Árbol ordenado

- $\exists$ una relación de orden total en el conjunto de subárboles de un árbol n-ario



Árbol ordenado con raíz x y subárboles $A_1, \ldots, A_m$



Árbol 3-ario de números enteros

Árboles n-arios

Bosque

- Un bosque ordenado de grado n (con $n \geq 1$) es una secuencia $A_1, \ldots A_m$, con $0 \leq m \leq n$, de árboles n-arios ordenados
  - Si $m = 0$, el bosque se llama vacío
- Un árbol n-ario se genera a partir de un elemento y un bosque ordenado de grado n, bastando considerar el elemento como raíz del árbol, y el bosque como sus subárboles
- Los bosques se generarán como secuencias de árboles, a partir de un bosque vacío, y una operación de añadir por la derecha un árbol a un bosque

Índice

Universidad Zaragoza

Especificación

```
espec árbolesOrdenados
usa booleanos,naturales
parámetro formal
    género elmto
fpf
géneros
    bosque, árbol {Los valores del género bosque representan secuencias de elementos del género árbol.
    Los valores del género árbol se componen de una raíz de género elmto y un bosque de árboles hijos.}
operaciones
    crearVacío: -> bosque
    {Devuelve el bosque vacío, es decir, la secuencia vacía de árboles}
    añadirÚltimo: bosque b, árbol a -> bosque
    {Devuelve un bosque igual al resultante de añadir el árbol a como último elemento de b}
    long: bosque b -> natural
    {Devuelve el número de árboles del bosque b, es decir, la longitud de la secuencia de árboles}
    parcial observar: bosque b, natural n -> árbol
    {Devuelve el n-ésimo árbol de la secuencia de árboles b.
    Parcial: sólo está definida si n <= long(b) }
    parcial resto: bosque b -> bosque
    {Devuelve un bosque igual al resultante de borrar el primer árbol de b.
    Parcial: sólo está definida si long(b)>0 }
    plantar: elmto e, bosque b -> árbol
    {Devuelve un árbol cuya raíz es e y sus subárboles son un bosque igual que b}
    raíz: árbol a -> elmto
    {Devuelve la raíz del árbol a}
    elBosque: árbol a -> bosque
    {Devuelve un bosque igual al bosque de los subárboles del árbol a}
    numHijos: árbol a -> natural
    {Devuelve el número de subárboles de a, es decir long(elBosque(a)) }
    parcial subÁrbol: árbol a , natural n -> árbol
    {Devuelve un árbol igual al n-ésimo subárbol de a.
    Parcial: no está definida si n > numHijos(a) }
    esHoja?: árbol a -> booleano
    {Devuelve verdad si y sólo si a no tiene subárboles, es decir, numHijos(a) = 0 }
    alturaBosque: bosque b -> natural
    {Si long(b) > 0, devuelve la altura del árbol más alto de b. Si long(b) = 0, devuelve 0}
    alturaÁrbol: árbol a -> natural
    {Devuelve la altura de a}
fespec
```

Índice

Universidad Zaragoza

Árboles *n*-arios

Recorridos en profundidad

- Consiste en visitar todos los elementos del árbol una sola vez

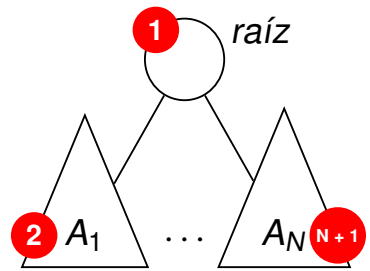
Árboles *n*-arios

Recorridos en profundidad

- Consiste en visitar todos los elementos del árbol una sola vez

- **Recorrido en pre-orden**

  1. Se visita la raíz
  2. Se recorren (en pre-orden) todos los subárboles, de izquierda a derecha



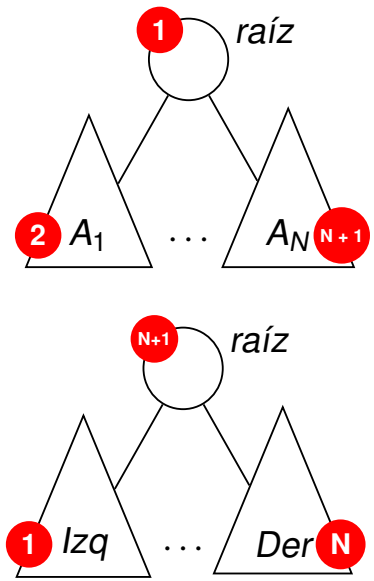
Árboles *n*-arios

Recorridos en profundidad

- Consiste en visitar todos los elementos del árbol una sola vez

- **Recorrido en pre-orden**
  1. Se visita la raíz
  2. Se recorren (en pre-orden) todos los subárboles, de izquierda a derecha

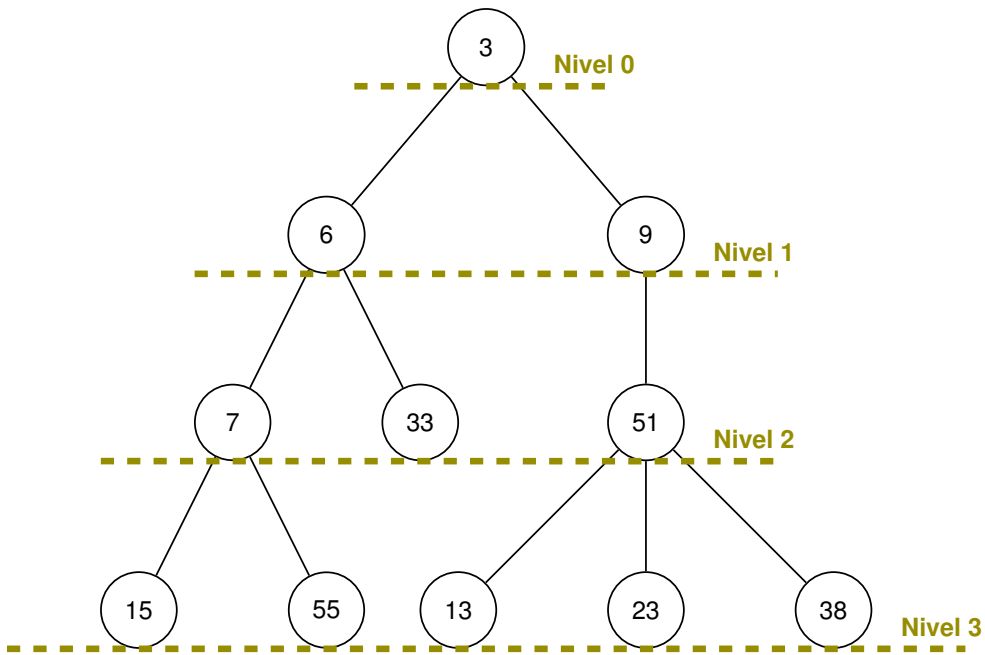
- **Recorrido en post-orden**
  1. Se recorren (en post-orden) todos los subárboles, de izquierda a derecha
  2. Se visita la raíz



Árboles *n*-arios

Recorrido en anchura

- Visitar todos los elementos del árbol una sola vez, de la forma que:
  - **Primero, se visitan los elementos del nivel 0, luego los del nivel 1, y así sucesivamente**;
  - **En cada nivel, se visitan los elementos de izquierda a derecha**

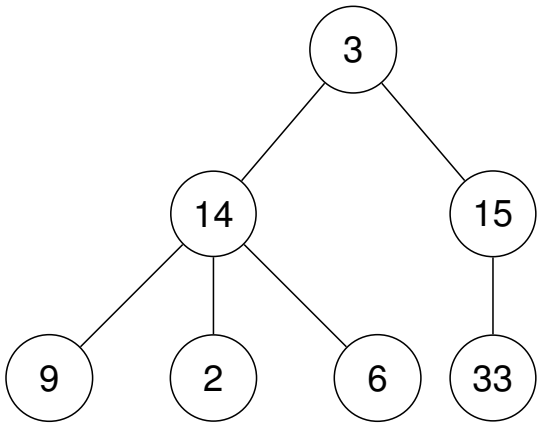


Índice

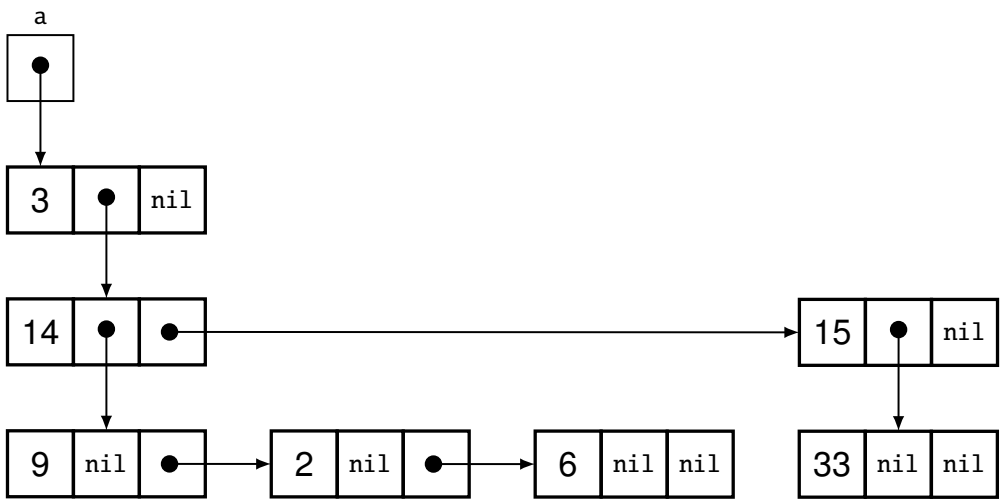
Universidad Zaragoza

Implementación dinámica

- Representación “primogénito - siguiente hermano” (*child-brother*)




```
tipos
    árbol = ↑nodo;
    nodo  = registro
                dato: elemento;
                primogénito, sigHermano: árbol;
            freg;
  bosque = árbol;
```



Implementación “primogénito - siguiente hermano”

```
módulo árbolesOrdenados
importa defTipoElemento
exporta
    tipos árbol, bosque
    procedimiento crearVacío(sal b: bosque)
    {Devuelve el bosque vacío, es decir, la secuencia vacía de árboles}
    procedimiento añadirÚltimo(e/s b: bosque; ent a: árbol)
    {Devuelve el bosque resultante de añadir el árbol a como último elemento de b}
    función long(b: bosque) devuelve natural
    {devuelve el número de árboles del bosque b, es decir, la longitud de la secuencia}
    procedimiento observar(ent b: bosque; ent n: natural; sal error: booleano; sal a: árbol)
    {Si 1 ≤ n ≤ long(b): devuelve el n-ésimo árbol de la secuencia de árboles b y error=falso;
    en caso contrario devuelve error = verdad}
    procedimiento resto(ent b: bosque; sal error: booleano; sal rb: bosque)
    {Si b no es vacío devuelve en rb el bosque resultante de borrar el primer árbol de b y error=falso;
    en caso contrario devuelve error = verdad}
    procedimiento plantar(sal a: árbol; ent e: elemento; ent b: bosque)
    {Devuelve un árbol a cuya raíz es e y sus subárboles son el bosque b}
    función raíz(a: árbol) devuelve elemento
    {Devuelve la raíz del árbol a}
    procedimiento elBosque(ent a: árbol; sal b: bosque)
    {Devuelve el bosque de los subárboles del árbol a}
    función numHijos(a: árbol) devuelve natural
    {Devuelve el nº de subárboles de a, es decir long(elBosque(a) }
    procedimiento subÁrbol(ent a: árbol; ent n: natural; sal error: booleano; sal sa: árbol)
    {Si 1 ≤ n ≤ numHijos(a): devuelve el n-ésimo subárbol de a y error = falso;
    en caso contrario error=verdad}
    función esHoja(a: árbol) devuelve booleano
    {Devuelve verdad si y sólo si a no tiene subárboles, es decir, numHijos(a) = 0 }
    función alturaBosque(b: bosque) devuelve natural
    {Devuelve la altura del árbol más alto de b}
    función alturaÁrbol(a: árbol) devuelve natural
    {Devuelve la altura de a}
    procedimiento duplicarBosque(sal nuevo: bosque; ent viejo: bosque)
    {Duplica la representación del bosque viejo guardándolo en nuevo}
    procedimiento liberarBosque(e/s b: bosque)
    {Libera la memoria dinámica accesible desde b, quedando b vacío}
    procedimiento duplicarÁrbol(sal nuevo: árbol; ent viejo: árbol)
    {Duplica la representación del árbol viejo guardándolo en nuevo}
    procedimiento liberarÁrbol(e/s a: árbol)
    {Libera la memoria dinámica accesible desde a}
...
```

```
...
implementación
tipos
      árbol = ↑nodo;
      nodo  = registro
                  dato: elemento;
                  primogénito, sigHermano:árbol
              freg;
     bosque = árbol

    procedimiento crearVacío(sal b: bosque)
    principio
        b := nil
    fin
    procedimiento añadirÚltimo(e/s b: bosque; ent a: árbol)
    variable
        aux: bosque
    principio
        si b = nil entonces
            b := a
        sino
            aux := b;
            mientrasQue aux↑.sigHermano ≠ nil hacer
                aux := aux↑.sigHermano
            fmq;
            aux↑.sigHermano := a
        fsi
    fin

    función long(b: bosque) devuelve natural
    principio
        si b = nil entonces
            devuelve 0
        sino
            devuelve 1 + long(b↑.sigHermano)
        fsi
    fin
...
```

```
...
    procedimiento observar(ent b: bosque; ent n: natural; sal error: booleano; sal a: árbol)
    principio
        si n = 0 or b = nil entonces
            error := verdad
        sino
            si n = 1 entonces
                a := b;
                error := falso
            sino
                observar(b↑.sigHermano, n - 1, error, a)
            fsi
        fsi
    fin

    procedimiento resto(ent b: bosque; sal error: booleano; sal rb: bosque)
    principio
        si b = nil entonces
            error := verdad
        sino
            error := falso;
            rb := b↑.sigHermano
        fsi
    fin

    procedimiento plantar(sal a: árbol; ent e: elemento; ent b: bosque)
    principio
        nuevoDato(a);
        a↑.dato := e;
        a↑.primogénito := b;
        a↑.sigHermano := nil
    fin

    función raíz(a: árbol) devuelve elemento
    principio
        devuelve a↑.dato
    fin
...
```

```
...
    procedimiento elBosque(ent a: árbol; sal b: bosque)
    principio
        b := a↑.primogénito
    fin

    procedimiento subárbol(ent a: árbol; ent n: natural; sal error: booleano; sal sa: árbol)
    variable
        b: bosque
    principio
        elBosque(a, b);
        observar(b, n, error, sa)
    fin

    función numHijos(a: árbol) devuelve natural
    variable
        b: bosque
    principio
        elBosque(a, b);
        devuelve long(b)
    fin

    función esHoja(a: árbol) devuelve booleano
    principio
        devuelve a↑.primogénito = nil
    fin

    función alturaBosque(b: bosque) devuelve natural
    principio
        si b = nil entonces
            devuelve 0
        sino
            devuelve max(alturaÁrbol(b), alturaBosque(b↑.sigHermano))
        fsi
    fin
...
```

```
...
    función alturaÁrbol(a: árbol) devuelve natural
    variable
        b: bosque
    principio
        si esHoja(a) entonces
            devuelve 0
        sino
            elBosque(a,b);
            devuelve 1 + alturaBosque(b)
        fsi
    fin

    procedimiento duplicarBosque(sal nuevo: bosque; ent viejo: bosque)
    variables
        primerÁrbol: árbol; error: booleano
    principio
        si viejo = nil entonces
            nuevo := nil
        sino
            observar(viejo, 1, error, primerÁrbol);
            duplicarÁrbol(nuevo, primerÁrbol);
            duplicarBosque(nuevo↑.sigHermano, viejo↑.sigHermano)
        fsi
    fin

    procedimiento duplicarÁrbol (sal nuevo: árbol; ent viejo: árbol)
    variables
        viejoBosque, nuevoBosque: bosque
    principio
        elBosque(viejo, viejoBosq);
        duplicarBosque(nuevoBosque, viejoBosque);
        plantar(raíz(viejo), nuevoBosque, nuevo)
    fin
...
```

```
...
    procedimiento liberarBosque(e/s b: bosque)
    principio
        si b ≠ nil entonces
            liberarBosque(b↑.sigHermano);
            liberarÁrbol(b)
        fsi
    fin

    procedimiento liberarÁrbol(e/s a: árbol)
    principio
        liberarBosque(a↑.primogénito);
        disponer(a)
    fin
fin {del módulo árbolesOrdenados}
```

Coste en tiempo de las operaciones

- `crearVacío`, `resto`, `plantar`, `raíz`, `elBosque` y `esHoja`: $\Theta(1)$
- Modificando la representación, puede lograrse que `añadirÚltimo`, `long`, `alturaBosque`, `numHijos` y `alturaArbol` tengan también coste $\Theta(1)$
- `observar` y `subárbol`: $\Theta(n)$ (siendo n el grado del árbol)
- `duplicarBosque`, `duplicarÁrbol`, `liberarBosque`, `liberarÁrbol`: $\Theta(N)$ (siendo N el número de nodos del bosque/del árbol)

Implementación dinámica

```
módulo recorridosÁrboles
importa árbolesOrdenados, listas
exporta
    procedimiento preOrden(ent a: árbol; e/s L: lista)
    {añade a la lista l los elementos de a recorridos en pre-orden}
    procedimiento postOrden(ent a: árbol; e/s L: lista)
    {añade a la lista l los elementos de a recorridos en post-orden}
implementación

    procedimiento preBosque(ent b: bosque; e/s L: lista)
    {añade a la lista L los elementos de todos los árboles del bosque b recorridos en pre-orden}
    principio
        si b ≠ nil entonces
            preOrden(b, L);
            preBosque(b↑.sigHermano, L)
        fsi
    fin

    procedimiento preOrden(ent a: árbol; e/s L: lista)
    principio
        añadirÚltimo(L, a↑.dato);
        preBosque(a↑.primogénito, L)
    fin

    procedimiento postBosque(ent b: bosque; e/s L: lista)
    {añade a la lista L los elementos de todos los árboles del bosque b recorridos en post-orden}
    principio
        si b ≠ nil entonces
            postOrden(b, L);
            postBosque(b↑.sigHermano, L)
        fsi
    fin

    procedimiento postOrden(ent a: árbol; e/s L: lista)
    principio
        postBosque(a↑.primogénito, L);
        añadirÚltimo(L, a↑.dato)
    fin
fin {del módulo}
```

Índice

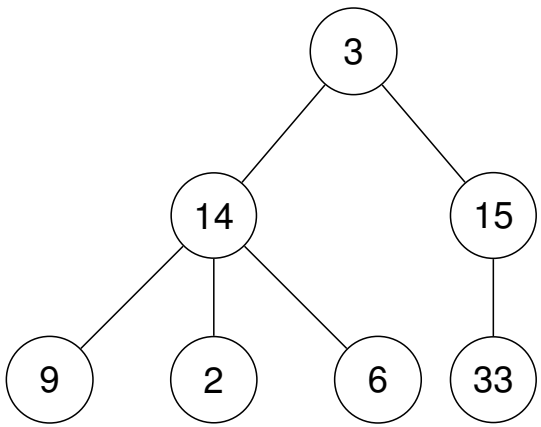
Universidad Zaragoza

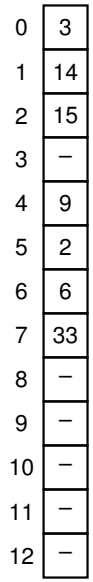
Epílogo
Otras definiciones

- Un árbol *n*-ario se dice *homogéneo* si todos sus subárboles excepto las hojas tienen *n* hijos
- Un árbol homogéneo es *completo* cuando todas sus hojas tienen la misma profundidad
- Un árbol se dice *casi-completo* cuando se puede obtener a partir de un árbol completo eliminando hojas consecutivas del último nivel, comenzando por la que está más a la derecha

Epílogo

Otras implementaciones – implementación estática





Elemento	*Índice*	*Condición*
e	i	
hijo k-ésimo de e	$n \cdot i + k$	si $n \cdot i + k < \texttt{max}$
padre de e	$(i-1) \div n$	si $i \neq 0$
hermano siguiente a e	$i+1$	si $i \mod n \neq 0$
número de orden entre sus hermanos	$((i-1) \mod n)+1$	si $i \neq 0$

Epílogo

Alternativa para recorridos de bosques (y árboles) *n*-arios

```
procedimiento preOrden(ent b: bosque; e/s L: lista)
{añade a la lista L los elementos del bosque n-ario b recorridos en pre-orden}
principio
    si b ≠ nil entonces
        añadirÚltimo(L, b↑.dato);
        preOrden(b↑.primogénito, L);
        preOrden(b↑.sigHermano, L)
    fsi
fin

procedimiento postOrden(ent b: bosque; e/s L: lista)
{añade a la lista L los elementos del bosque n-ario b recorridos en post-orden}
principio
    si b ≠ nil entonces
        postOrden(b↑.primogénito, L);
        añadirÚltimo(L, b↑.dato);
        postOrden(b↑.sigHermano, L)
    fsi
fin
```

Universidad Zaragoza

Trabajo encargado

Leer lección 15. Empezar Práctica 5.

Ejercicio 2 de la hoja de problemas 5

Estructuras de Datos y Algoritmos

Árboles n-arios

Lección 15

Universidad Zaragoza

1542

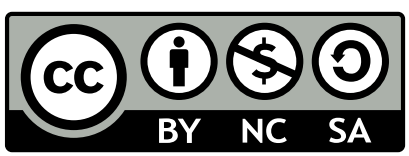
Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2023/2024

Grado en Ingeniería Informática

Universidad de Zaragoza

Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt



Adaptadas de diapositivas de Javier Campos