Estructuras de Datos y Algoritmos

Árboles AVL

Lección 14

Universidad Zaragoza

1542

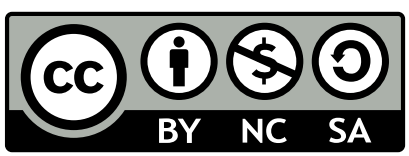
Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2023/2024

Grado en Ingeniería Informática

Universidad de Zaragoza

Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt



Adaptadas de diapositivas de Javier Campos

Índice

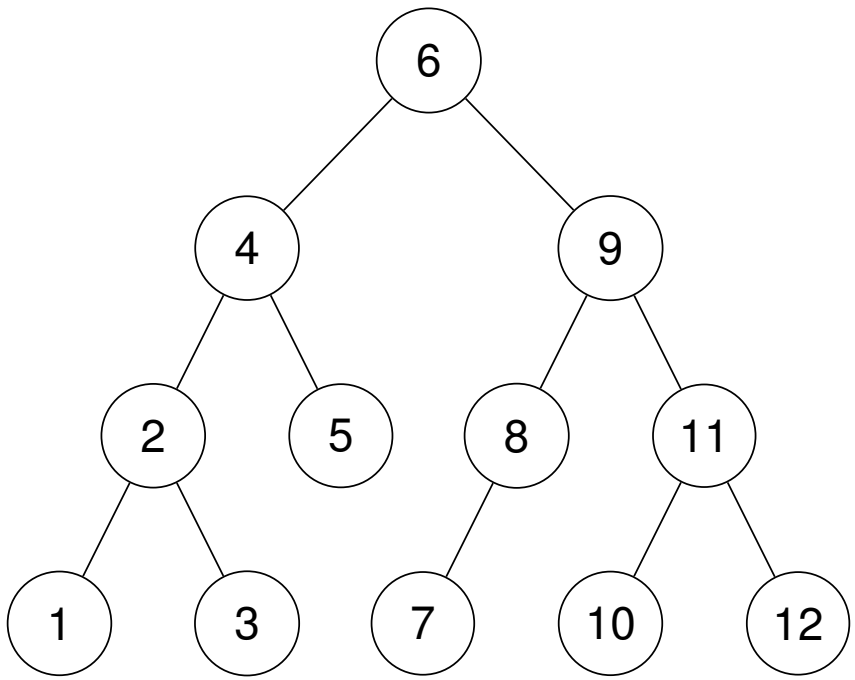
Universidad Zaragoza

Índice

Universidad Zaragoza

Conceptos

- Un árbol binario de búsqueda se dice **equilibrado** (o **balanceado**) si y sólo si, para cada uno de sus nodos ocurre que las alturas de sus 2 subárboles difieren como mucho en 1
  - Definición dada por Adelson-Velskii y Landis (1962)
  - Denominados **árboles AVL**



Conceptos

Árboles balanceados o equilibrados

- Un ABB es *k-equilibrado* si cada nodo lo es
- Un nodo es *k-equilibrado* si las alturas de sus subárboles izquierdo y derecho difieren en no más de k ($k = 0$ sería equilibrio perfecto)

Árboles AVL

- Definidos por Adelson-Velskii y Landis (1962)
- Un ABB 1-equilibrado se llama AVL

Universidad Zaragoza
1542

Índice

Universidad Zaragoza

Fundamentos de árboles AVL

En un árbol AVL:

- Se garantiza que la altura del árbol es mínima, o casi: $\Theta(\log N)$, siendo N el número de nodos del árbol
  - Teorema de Adelson-Velskii y Landis

Fundamentos de árboles AVL

En un árbol AVL:

- Se garantiza que la altura del árbol es mínima, o casi: $\Theta(\log N)$, siendo N el número de nodos del árbol
  - Teorema de Adelson-Velskii y Landis
- Coste de inserción, búsqueda y borrado, en el peor caso: $O(\log N)$

Universidad Zaragoza

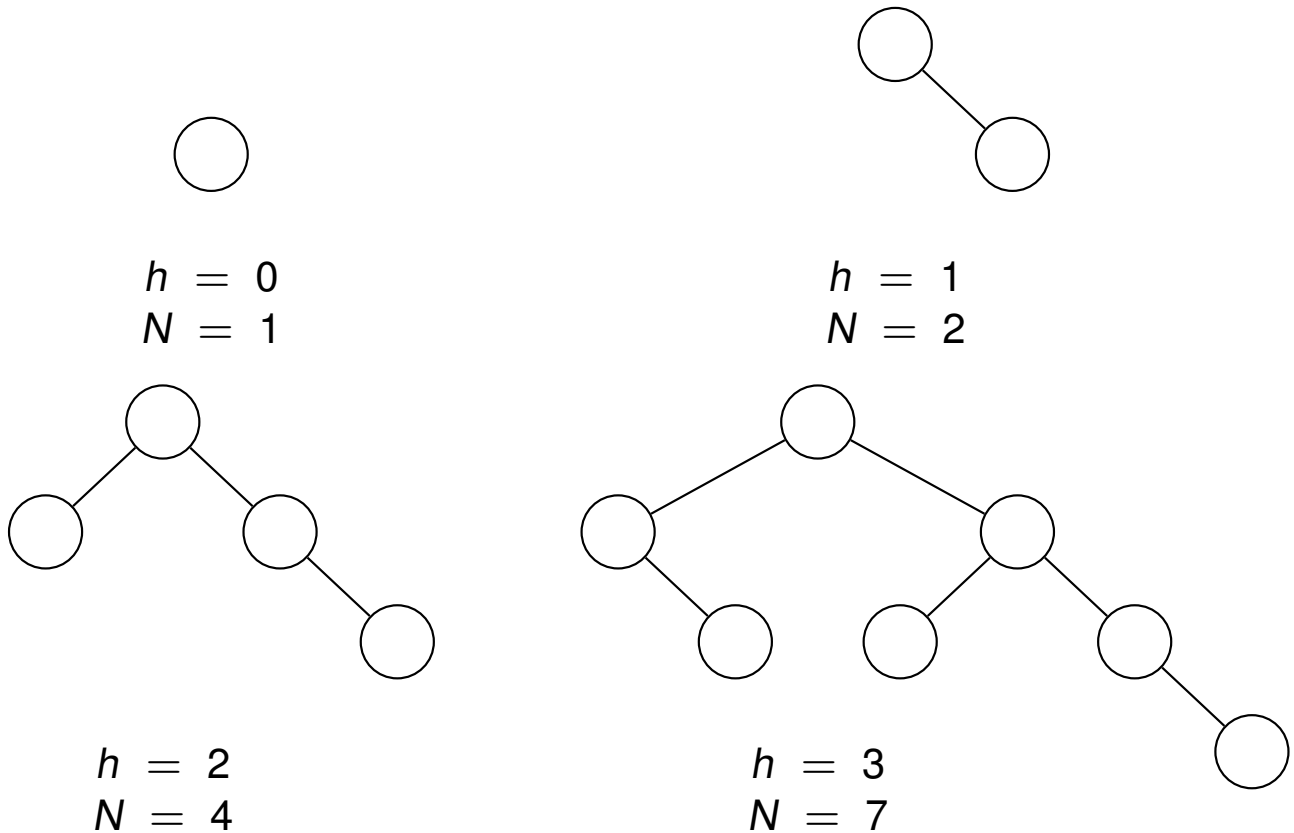
Teorema de Adelson-Velskii y Landis

¿Cuál es el mínimo número de nodos en un AVL de altura h?

Universidad Zaragoza

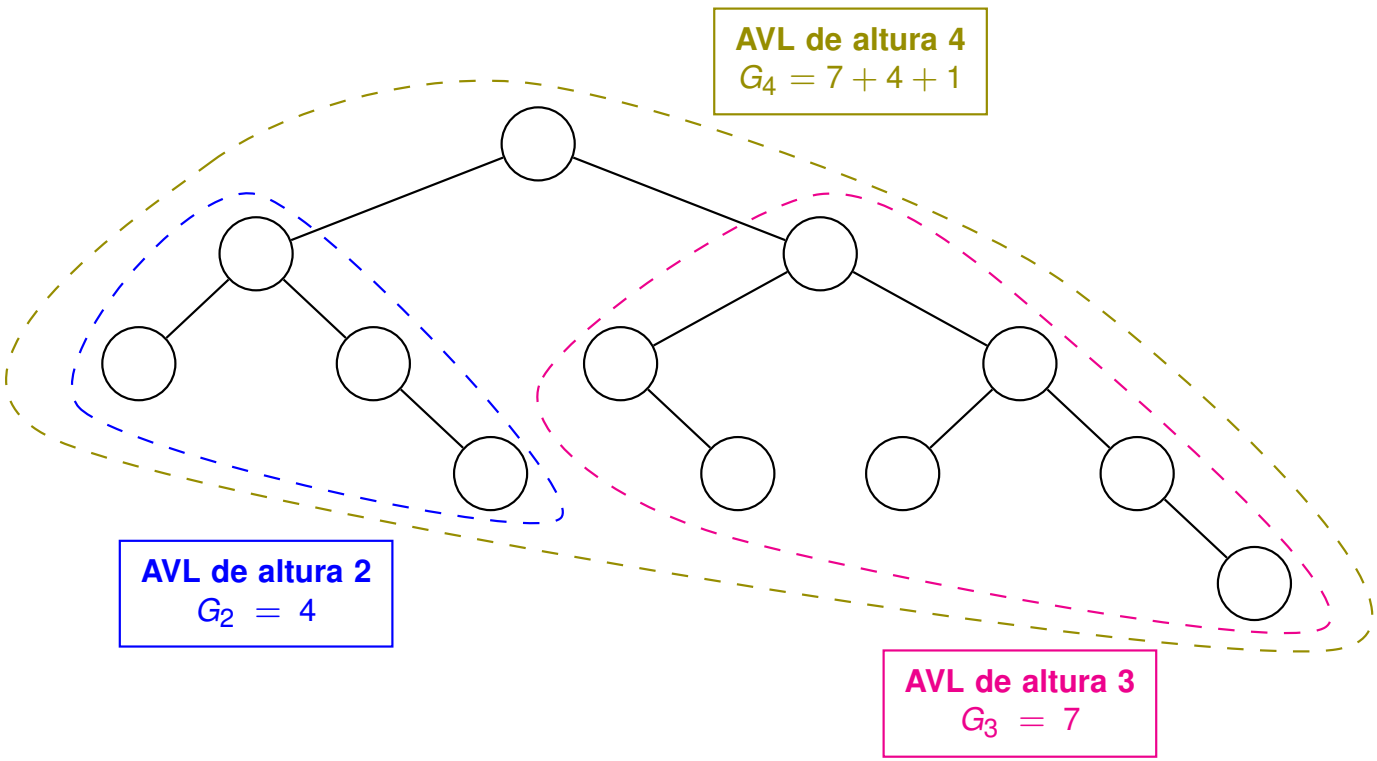
Teorema de Adelson-Velskii y Landis

¿Cuál es el mínimo número de nodos en un AVL de altura h?



Teorema de Adelson-Velskii y Landis

- Sea G_h el número de nodos en el AVL de altura h que tiene el mínimo número posible de nodos
- Entonces: $G_h = G_{h-1} + G_{h-2} + 1$



Teorema de Adelson-Velskii y Landis

- Por su semejanza y relación con la serie de Fibonacci:

$$F_h = F_{h-1} + F_{h-2}; F_0 = 1; F_{-1} = 0$$

- A los árboles AVL construidos con el menor número de nodos posible para una altura dada se les denomina *árboles de Fibonacci*

h	G_h	F_h
0	1	1
1	2	1
2	4	2
3	7	3
4	12	5
5	20	8
6	33	13
...	...	...

- Como se tiene que $G_h = F_{h+2} - 1$
- Y se sabe que $F_h > \frac{\phi^h}{\sqrt{5}} - 1$, con $\phi = \frac{(1+\sqrt{5})}{2}$
- Entonces: $G_h > \frac{\phi^{h+2}}{\sqrt{5}} - 2$

Teorema de Adelson-Velskii y Landis

Teorema

- La altura h de un árbol AVL con N nodos internos siempre está comprendida entre $\log_2(N+1)$ y $1.4404\log_2(N+2) - 0.3277$.

Demostración

- Un AVL de altura h tiene como máximo 2^h nodos. Entonces:

$$N + 1 \leq 2^h \Rightarrow h \geq \log_2(N+1)$$

- Para encontrar el límite superior, plantearemos el problema de encontrar el número mínimo de nodos internos contenidos en un árbol equilibrado de altura h
  - Sea T_h un AVL de altura h con el mínimo número de nodos posible. Por definición de AVL, un subárbol de T_h tendrá una altura de $h-1$, y el otro tendrá $h-1$ o $h-2$. Como T_h tiene el mínimo número de nodos posible, vamos a considerar que el subárbol izquierdo tiene una altura $h-1$ y el subárbol derecho $h-2$.
  - Sea T_{h-1} el subárbol izquierdo y T_{h-2} el subárbol derecho. Entonces, se demuestra por inducción que el árbol de Fibonacci de altura $h+1$ tiene los menos nodos posibles de entre todos los posibles árboles balanceados de altura h. Entonces:

$$N \geq F_{h+2} - 1 > \frac{\phi^{h+2}}{\sqrt{5}} - 2;\ \sqrt{5}(N+2) > \phi^{h+2};\ \frac{1}{2}\log_2 5 + \log_2(N+2) > (h+2)\log_2\phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h < 1.4404\log_2(N+2) - 0.3277$$

Índice

Universidad Zaragoza

Implementación de árboles AVL

- Definición de ***factor de equilibrio***: $F_e = h_{\text{subárbol derecho}} - h_{\text{subárbol izquierdo}}$
- Permite construir algoritmos más simples que considerando las alturas
- Si el factor de equilibrio de un nodo es:

  0: el nodo está ***perfectamente equilibrado*** (es decir, sus subárboles tienen exactamente la misma altura)

  1: el nodo está ***pesado a derechas*** (es decir, su subárbol derecho es un nivel más alto)

  –1: el nodo está ***pesado a izquierdas*** (es decir, su subárbol izquierdo es un nivel más alto)

- **Hay que recalcular el factor de equilibrio al insertar o borrar elementos**
- Tras insertar o borrar, si $F_e \geq 2$ o $F_e \leq -2$, es necesario ***reequilibrar***

Universidad Zaragoza

Implementación de árboles AVL

- Hay que guardar información sobre el equilibrio en cada nodo

```
tipos avl = ↑nodo
     factorEquil =  (pesadoIzq, equilibrado, pesadoDer);
                    { o lo que es lo mismo, -1, 0, 1 }
     nodo = registro
                laClave: clave; { o bien, dato: elemento}
                elValor: valor;
                equilibrio: factorEquil;
                izq, der: abb
            freg
```

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción

Pasos

1. Buscar hasta encontrar la posición de inserción o modificación (proceso idéntico a inserción en árbol binario de búsqueda → se insertará siempre en una hoja)
2. Insertar el nuevo nodo, con factor de equilibrio “equilibrado”
3. Desandar el camino de búsqueda, verificando el equilibrio de los nodos del camino, y reequilibrándolos, si es necesario

Universidad Zaragoza

Implementación de árboles AVL

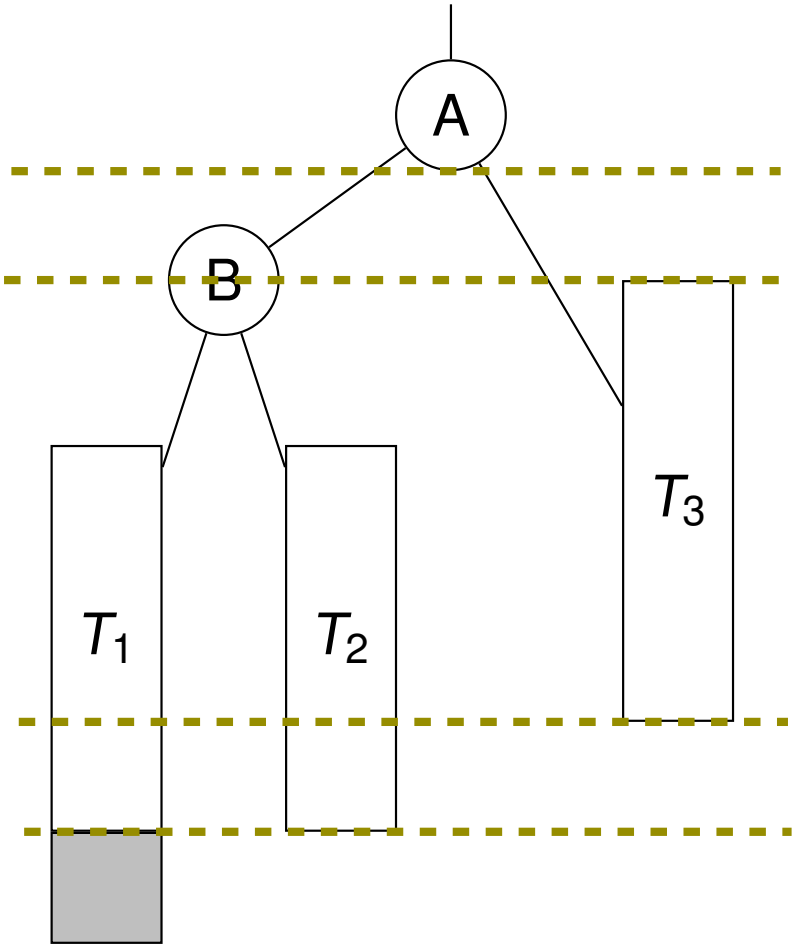
Proceso de inserción

- Se implementa mediante recursividad
  - Se pasa una variable que **indica si el subárbol ha aumentado de tamaño**
  - Si no ha aumentado, no cambia el factor de equilibrio
  - Si ha aumentado, hay varias posibilidades:

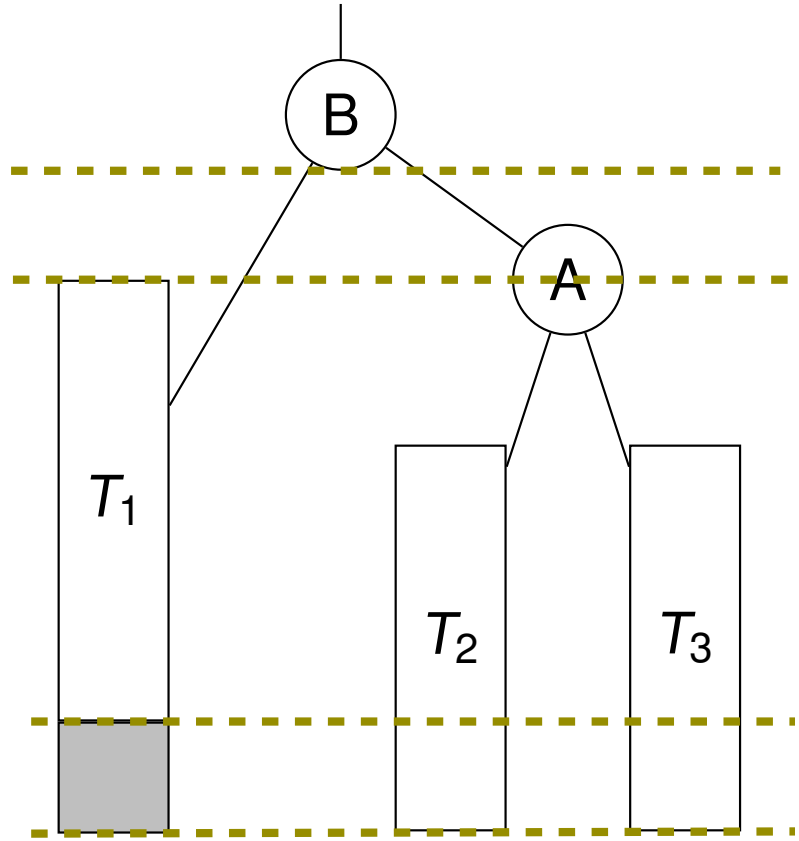
Caso	Insertado en la izquierda	Insertado en la derecha
Era `pesadoDer`	Ahora equilibrado	***Hay que reequilibrar***
Era `equilibrado`	Ahora `pesadoIzq`	Ahora `pesadoDer`
Era `pesadoIzq`	***Hay que reequilibrar***	Ahora equilibrado

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción – posibles casos



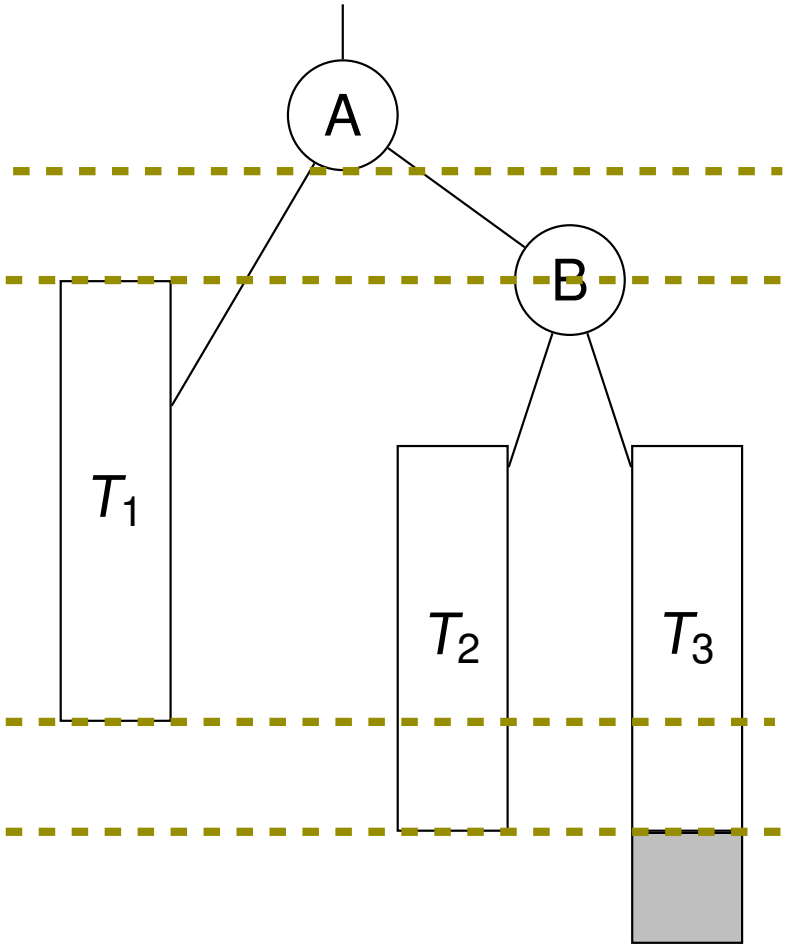
Caso 1: Izquierda-Izquierda



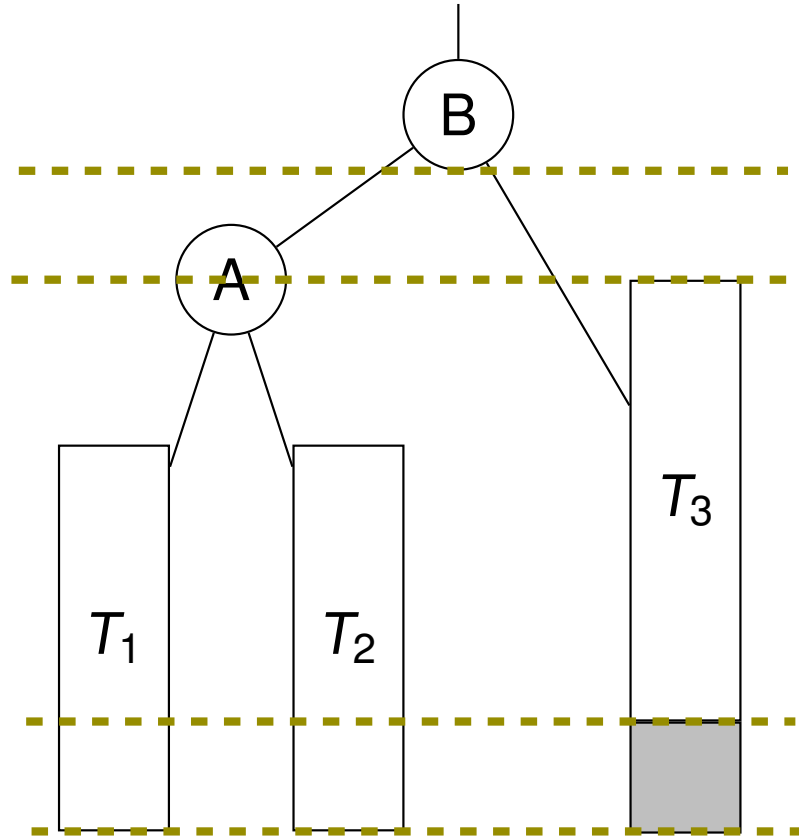
Solución ***rotación a la izquierda***

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción – posibles casos



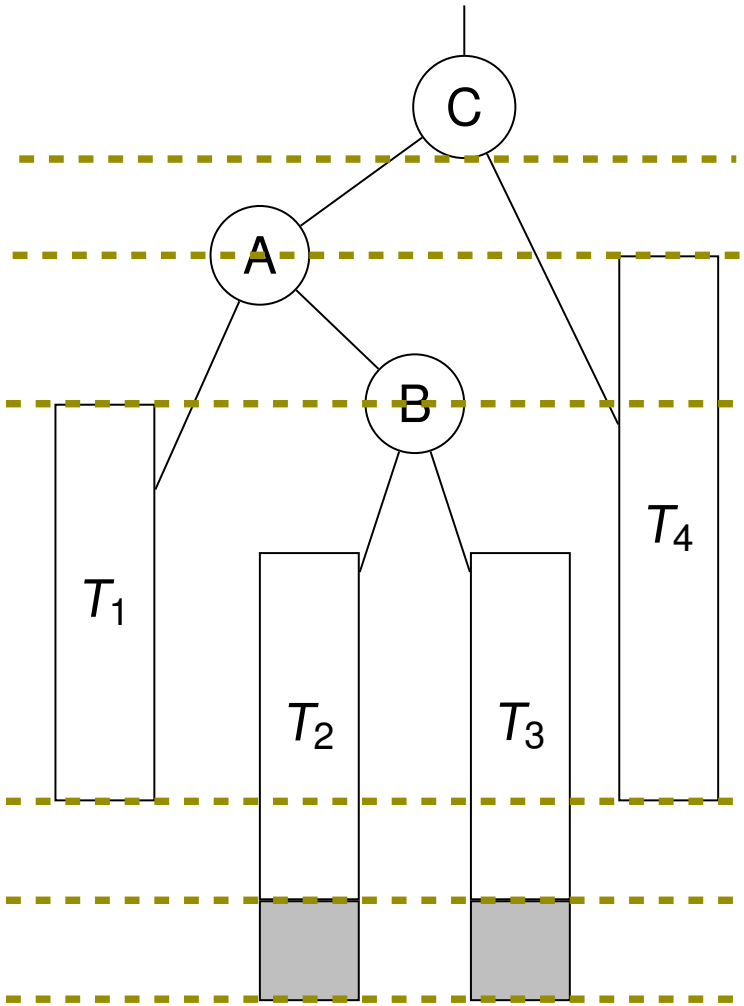
Caso 2: Derecha-Derecha



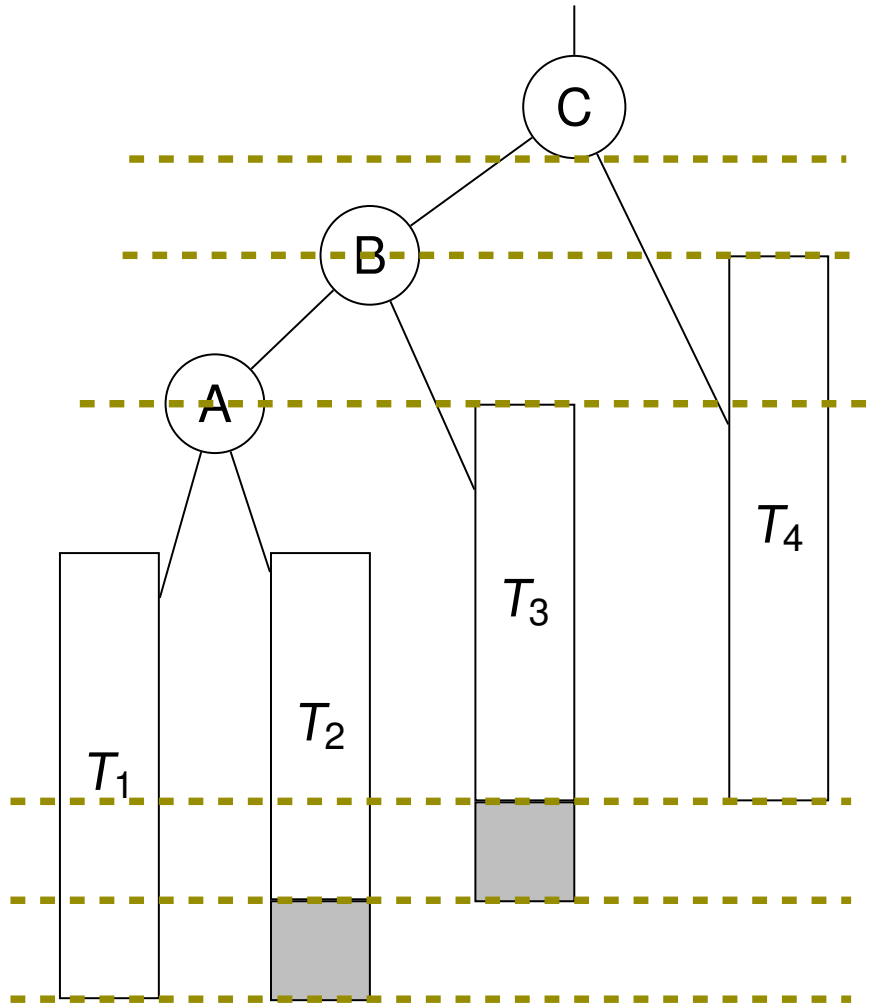
Solución ***rotación a la derecha***

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción – posibles casos



Caso 3: Izquierda-Derecha

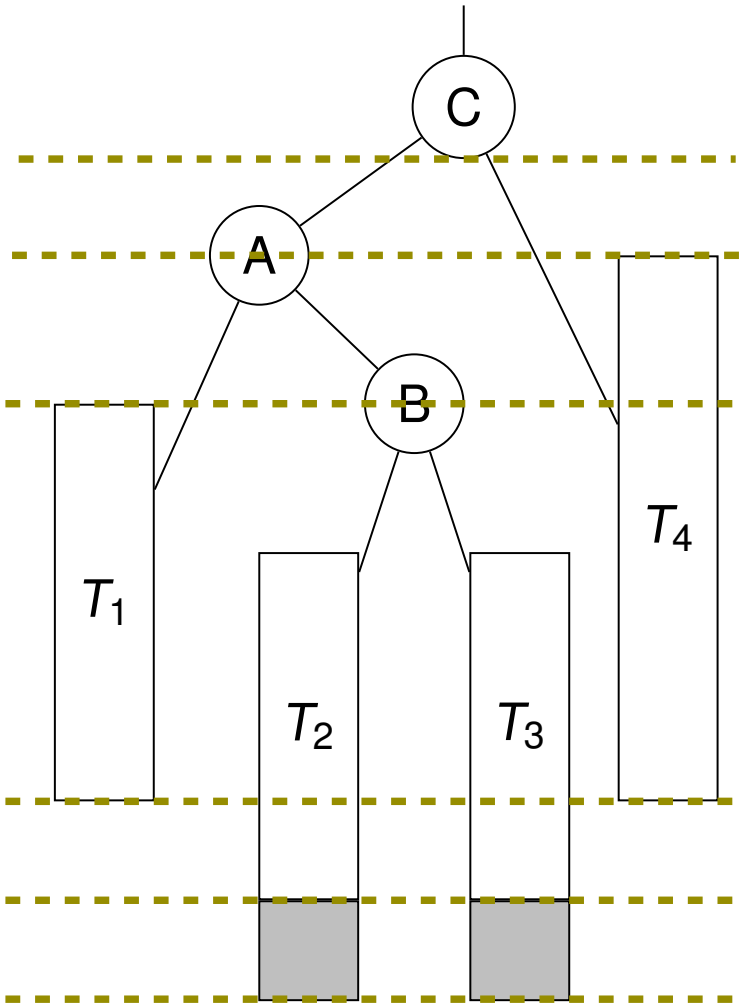


Solución ***rotación doble***

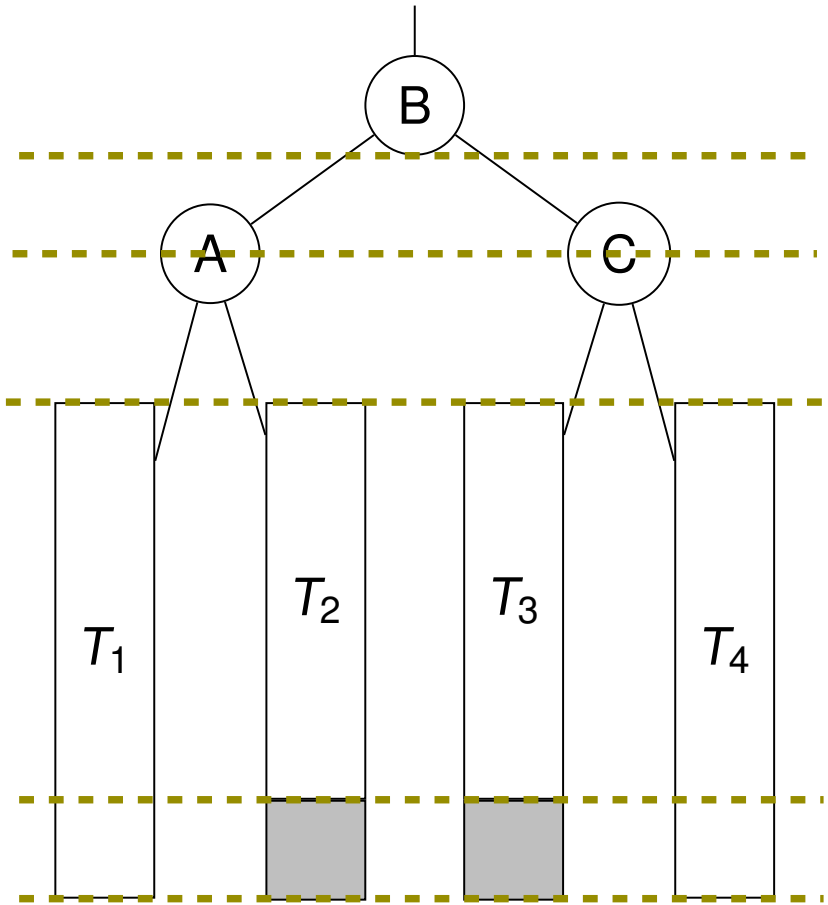
PASO 1: ***rotación a derecha***

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción – posibles casos



Caso 3: Izquierda-Derecha

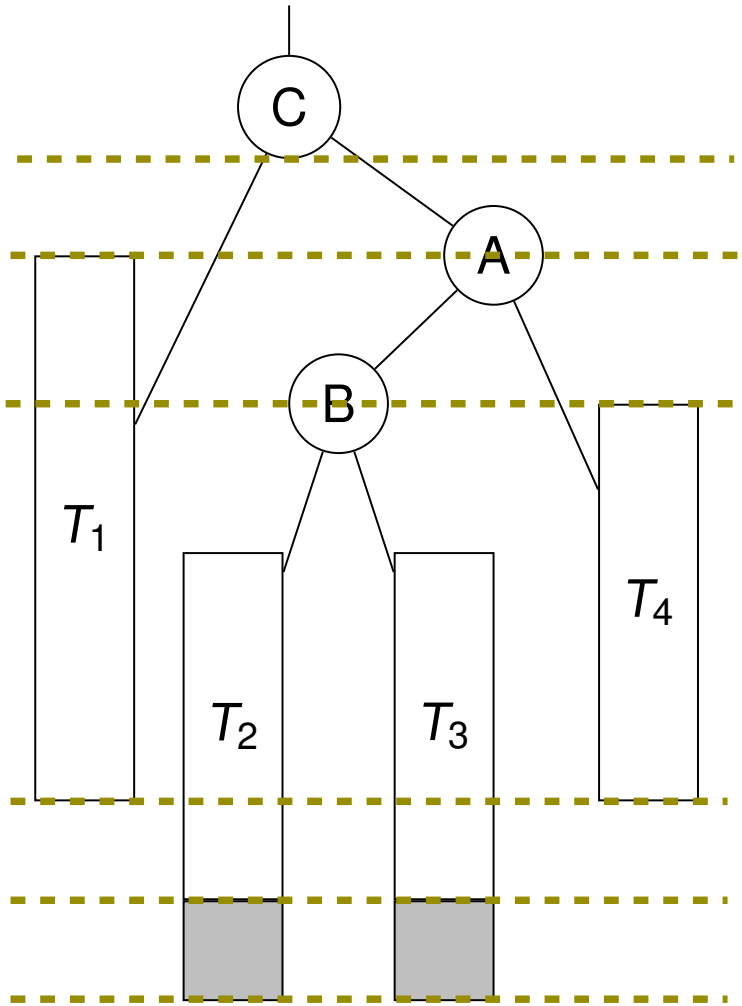


Solución ***rotación doble***

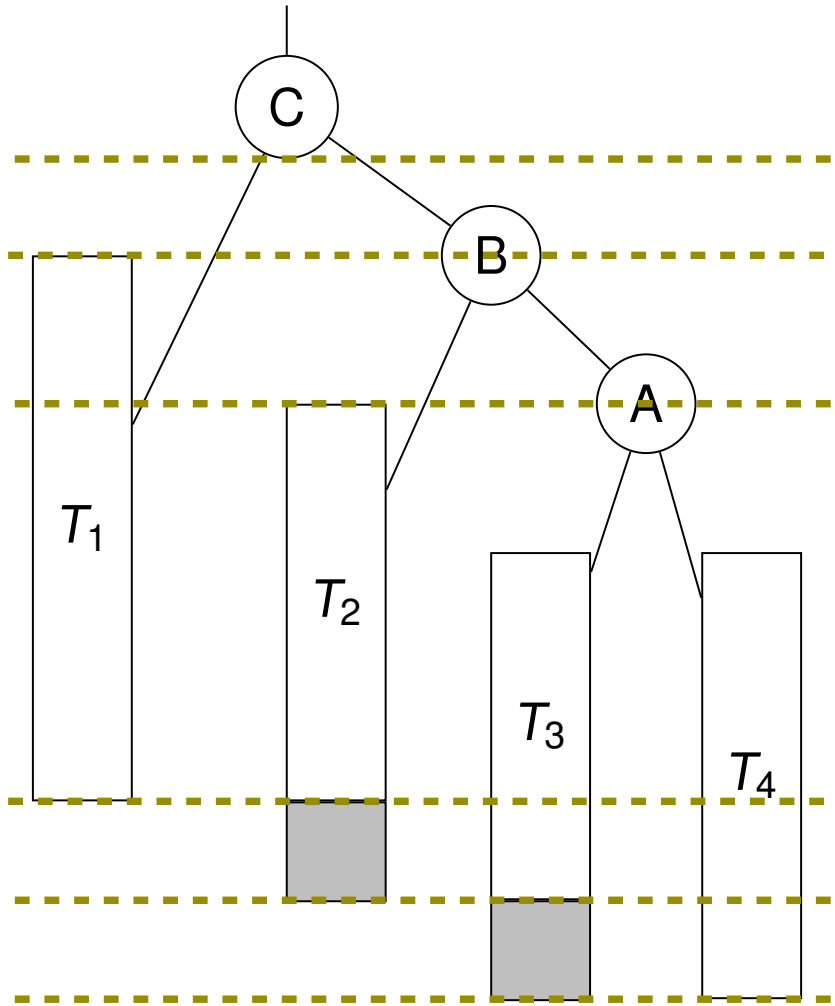
PASO 2: ***rotación a izquierda***

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción – posibles casos de desequilibrios



Caso 4: Derecha-Izquierda

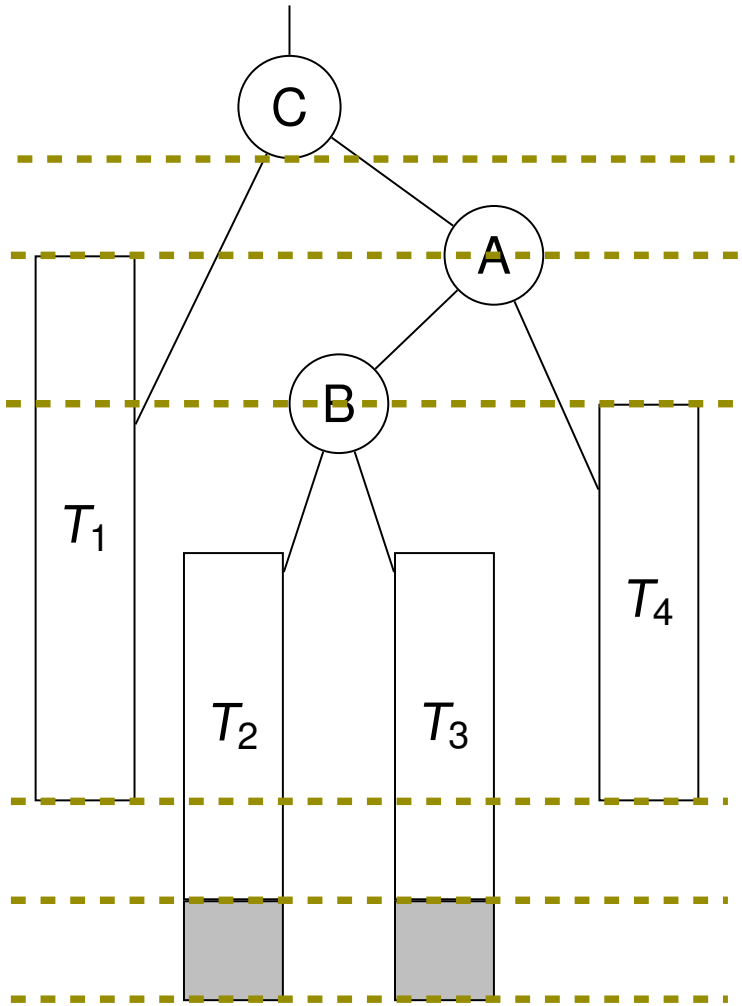


Solución ***rotación doble***

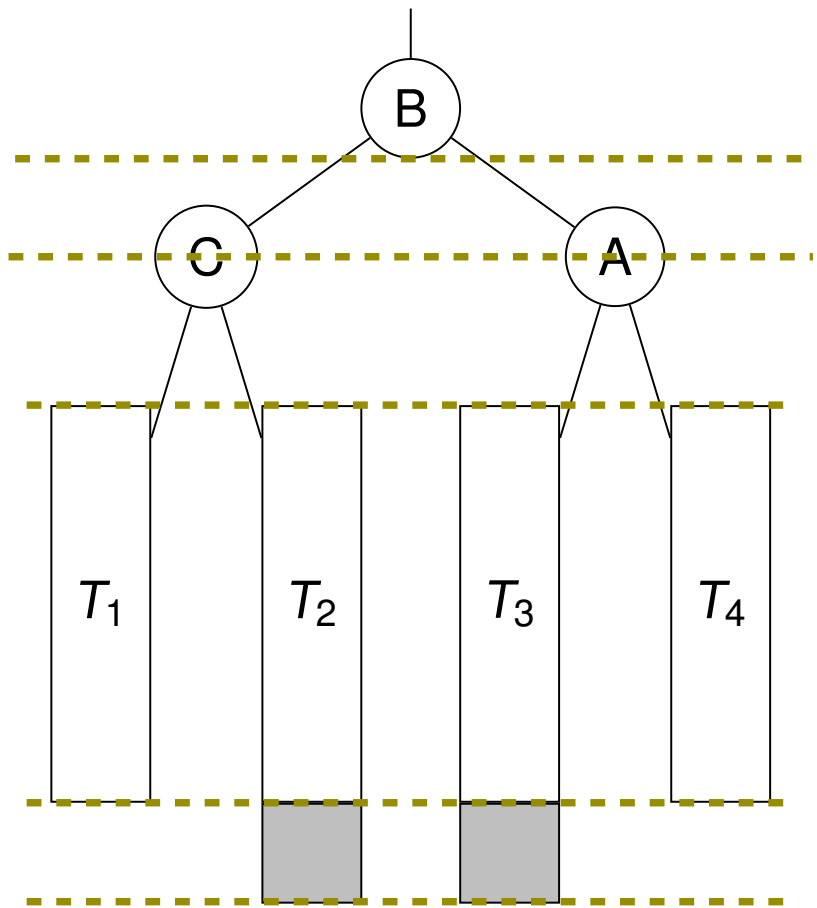
PASO 1: ***rotación a izquierda***

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción – posibles casos de desequilibrios



Caso 4: Derecha-Izquierda



Solución ***rotación doble***

Paso 2: ***rotación a derecha***

Implementación de árboles AVL

Proceso de inserción – notas finales

Importante

- El nodo insertado se establece como `equilibrado`
- Se regresa por el camino de búsqueda, recalculando el factor de equilibrio de los nodos, hasta alcanzar la raíz o encontrar un nodo que no cumpla el factor de equilibrio, y requiera una reestructuración para reequilibrar
- Tras reequilibrar, el árbol resultante queda de la misma altura que en su estado inicial
  - Por lo tanto, si inicialmente estaba equilibrado, el árbol resultante tras la inserción, también estará equilibrado
- **Basta una única rotación** (u operación de reequilibrar) para dejar todo el árbol resultante equilibrado
  - Es decir, **no hace falta seguir evaluando hasta la raíz**

Universidad Zaragoza

Implementación de árboles AVL

Proceso de borrado

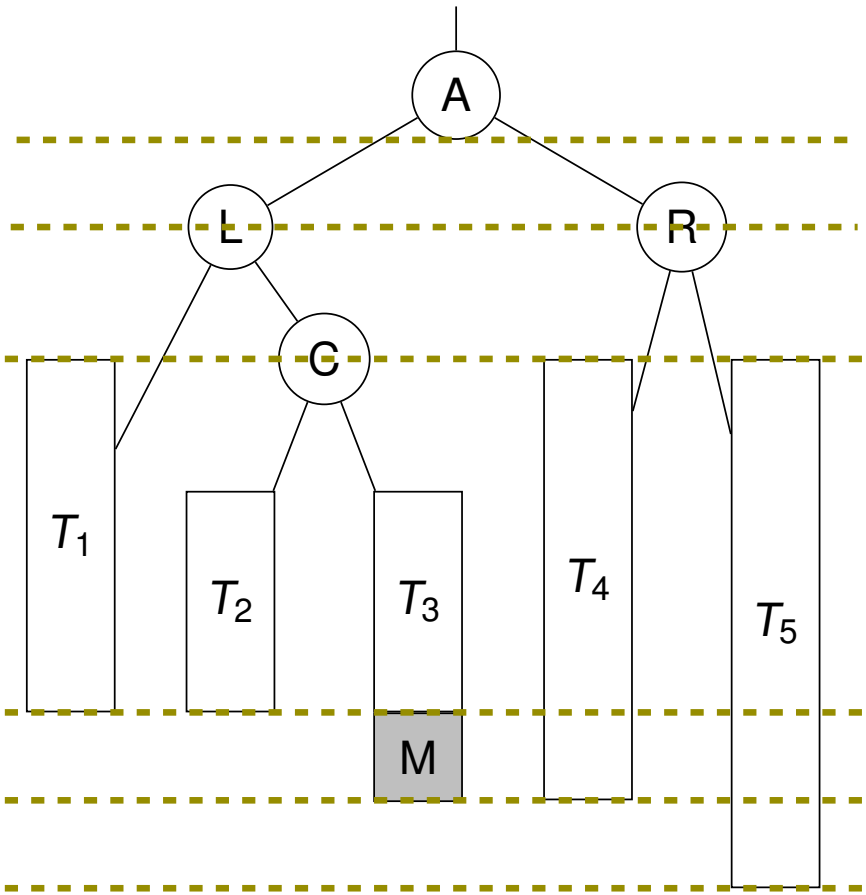
Pasos *(similar al borrado en ABB)*

1. Localizar el nodo a borrar
2. Se borra el nodo, atendiendo a:
   - Si el nodo es hoja, se borra
   - Si no es hoja:
     - Se sustituye por el máximo del subárbol izquierdo; y
     - Se borra dicho máximo del subárbol izquierdo
3. Se regresa por el camino de búsqueda, calculando los nuevos factores de equilibrio:
   - Si algún nodo pierde la condición de equilibrio, debe ser restaurada → ***reequilibrar***
   - **Debe continuarse hasta la raíz, porque pueden ser necesarios más reequilibrados**

Universidad Zaragoza

Implementación de árboles AVL

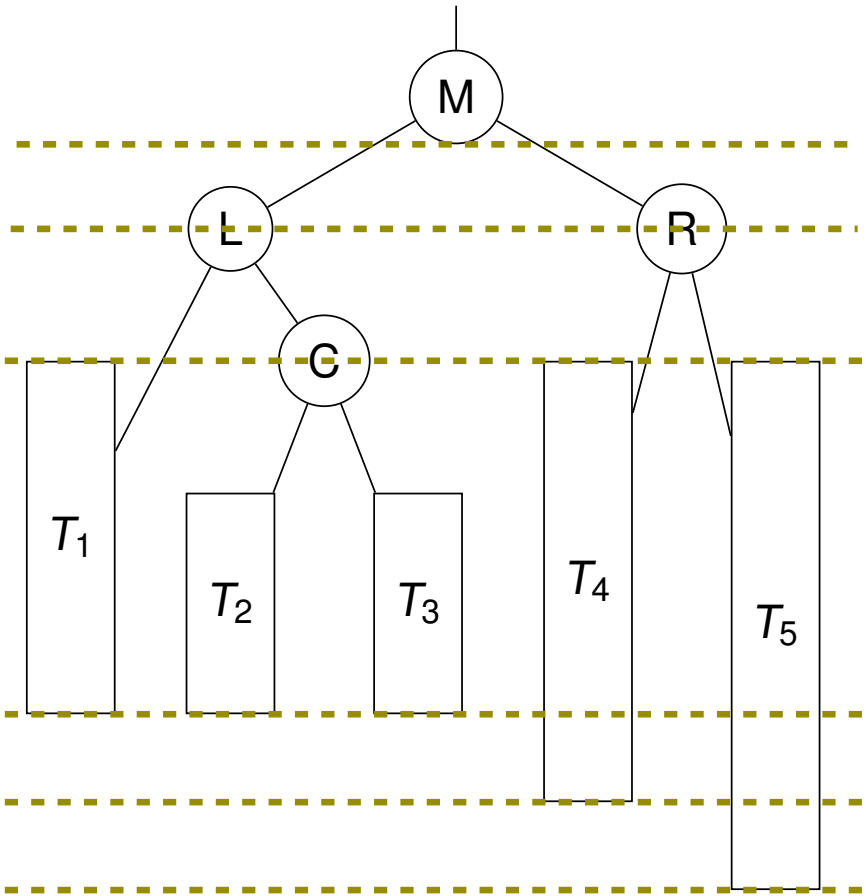
Proceso de borrado – ejemplo



- **Borrar A y la nueva raíz será M**

Implementación de árboles AVL

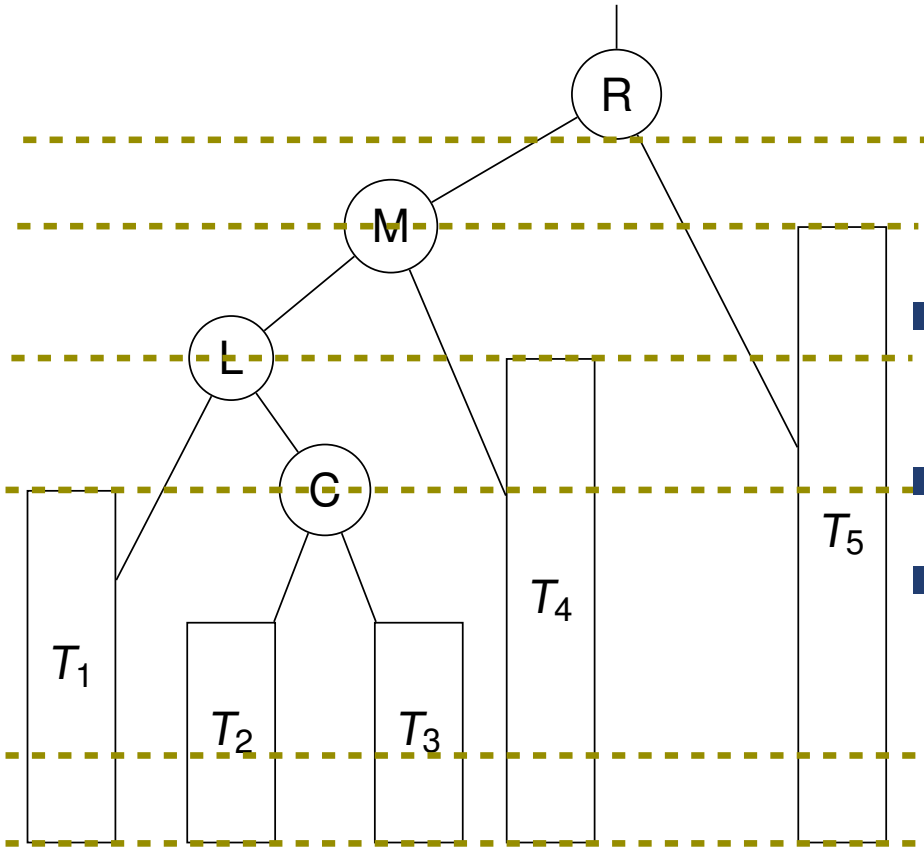
Proceso de borrado – ejemplo



- Borrado A, la nueva raíz es M. **Árbol resultante pesado a la derecha**
- Solución similar a la inserción: aplicar ***rotación a la derecha***

Implementación de árboles AVL

Proceso de borrado – ejemplo



- Borrado A, la nueva raíz es M. **Árbol resultante pesado a la derecha**
- Aplicada rotación a la **derecha**
- **El árbol resultante ha perdido altura**

En borrado pueden ser necesarias varias operaciones de restauración del equilibrio, y hay que seguir comprobando hasta llegar a la raíz

Índice

Universidad Zaragoza

Implementación de árboles AVL (pseudocódigo)

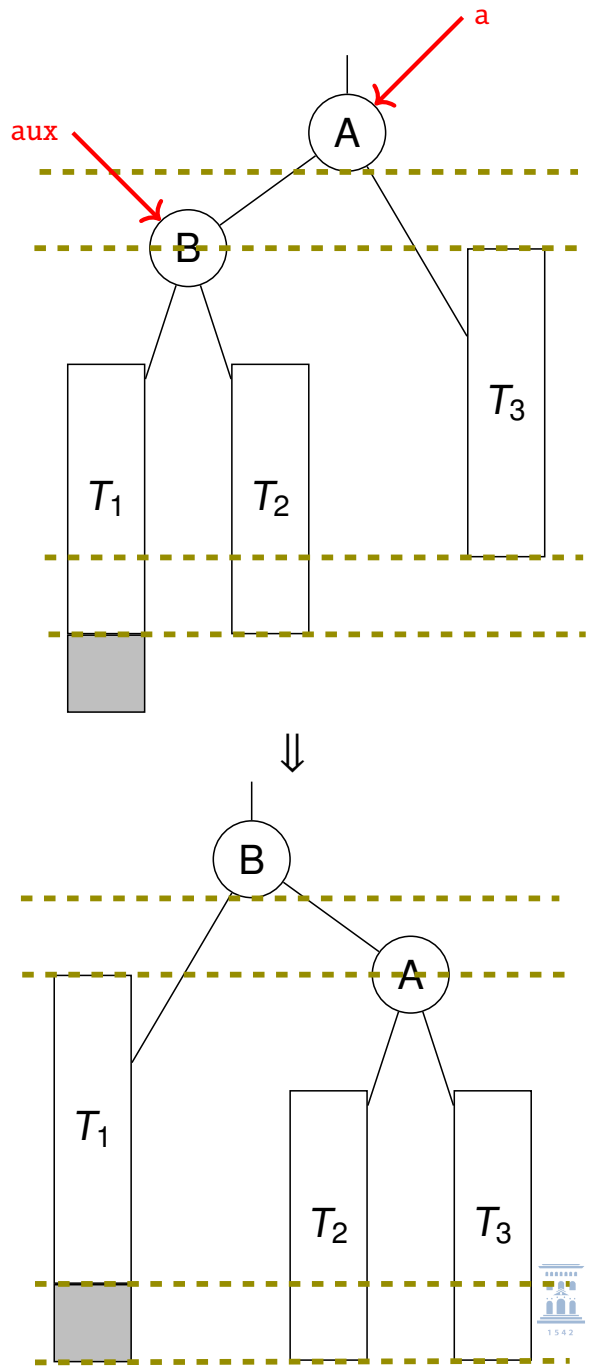
```
módulo árbolesAVL
exporta
    tipo avl
    procedimiento vacío(sal a: avl);
    procedimiento insertar(e/s a: avl; ent c: clave; ent v: valor);
    procedimiento borrar(e/s a: avl; ent c: clave);
    procedimiento buscar(ent a: avl; ent c: clave; sal éxito: booleano; sa
implementación

tipos avl = ↑nodo
     factorEquil =  (pesadoIzq, equilibrado, pesadoDer);
                    { o lo que es lo mismo, -1, 0, 1 }
     nodo = registro
                laClave: clave; { o bien, dato: elemento}
                elValor: valor;
                equilibrio: factorEquil;
                izq, der: abb
            freg
```

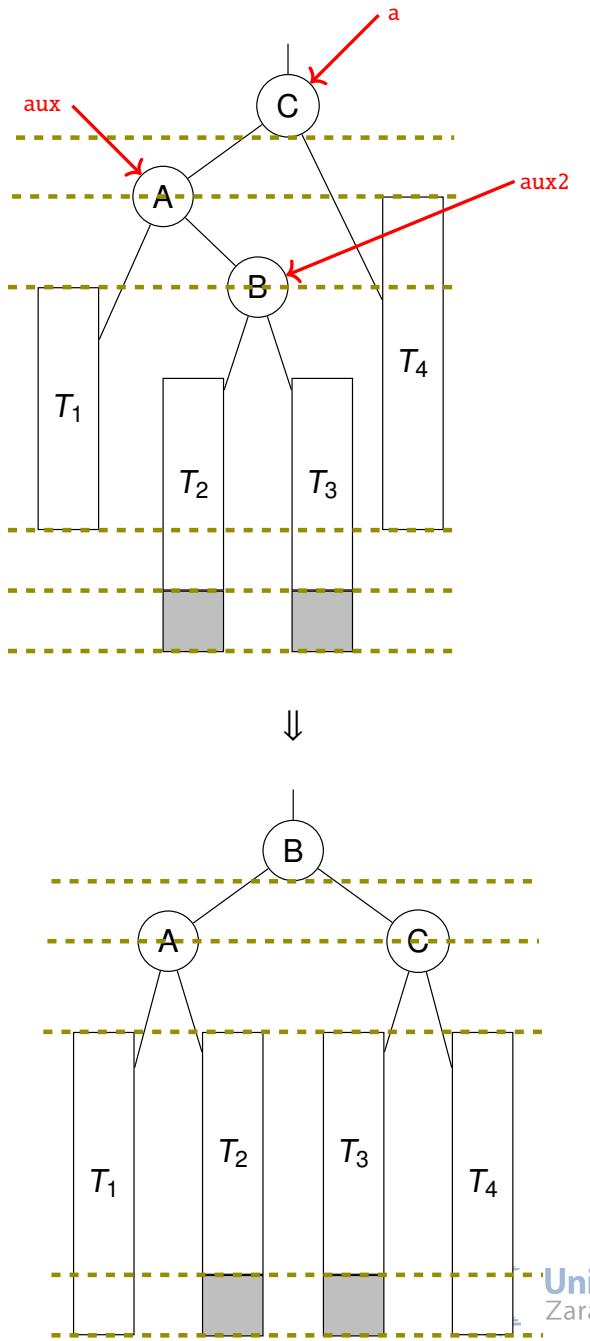
```
procedimiento insertar(e/s a: avl; ent c: clave; ent v: valor)
variable
    alturaModificada: booleano
principio
    alturaModificada := falso;
    insertarRec(a, c, v, alturaModificada)
fin

procedimiento insertarRec(e/s a: avl; ent c: clave; ent v: valor; e/s alturaModificada: booleano)
principio
    si a = nil entonces
        nuevodato(a);
        a↑.laClave := c; a↑.elValor := v;
        a↑.equilibrio := equilibrado;
        a↑.izq := nil; a↑.der := nil;
        alturaModificada := verdad; {se ha modificado su altura}
    sino_si c < a↑.laClave entonces
        insertarRec(a↑.izq, c, v, alturaModificada);
        si alturaModificada entonces
            selección
                a↑.equilibrio=pesadoIzq:
                    si a↑.izq↑.equilibrio = pesadoIzq entonces
                        rotaciónIzq(a)
                    sino
                        rotaciónIzqDer(a)
                    fsi;
                    alturaModificada := falso;
                a↑.equilibrio = equilibrado: a↑.equilibrio := pesadoIzq;
                a↑.equilibrio = pesadoDer: a↑.equilibrio := equilibrado;
                    alturaModificada:=falso
            fselección
        fsi
    sino_si a↑.laClave < c entonces
        {... simétrico ...}
    sino
        a↑.elValor := v {actualizar el valor asociado a la clave}
    fsi
fin
```

```
procedimiento rotaciónIzq(e/s a :avl)
variable
    aux: avl
principio
    aux := a↑.izq;
    a↑.izq := aux↑.der;
    a↑.equilibrio := equilibrado;
    aux↑.der := a;
    a := aux;
    a↑.equilibrio := equilibrado
fin
```



```
procedimiento rotacionIzqDer(e/s a: avl)
variables
    aux1, aux2: avl
principio
    aux1 := a↑.izq;
    aux2 := a↑.izq.↑der;
    aux1↑.der := aux2↑.izq;
    aux2↑.izq := aux1;
    a↑.izq := aux2;
    si aux2↑.equilibrio = pesadoIzq entonces
        aux1↑.equilibrio := equilibrado;
        a↑.equilibrio := pesadoDer
    sino_si aux2↑.equilibrio = equilibrado entonces
        aux1↑.equilibrio := equilibrado;
        a↑.equilibrio := equilibrado
    sino
        aux1↑.equilibrio := pesadoIzq;
        a↑.equilibrio := equilibrado
    fsi;
    a↑.izq := aux2↑.der;
    aux2↑.der := a;
    aux2↑.equilibrio := equilibrado;
    a := aux2
fin
```



```
procedimiento borrar(e/s a: avl; ent c: clave)
variable
    alturaModificada: booleano
principio
    alturaModificada := falso;
    borrarRec(a, clave, alturaModificada)
fin

procedimiento borrarRec(e/s a: avl; ent c: clave; e/s alturaModificada: booleano)
variable
    aux: avl
principio
    si a ≠ nil entonces
        si c < a↑.laClave entonces
            borrarRec(a↑.izq, c, alturaModificada);
            si alturaModificada entonces
                equilIzq(a, alturaModificada)
            fsi
        sino_si a↑.laClave < c entonces
            borrarRec(a↑.der, c, alturaModificada);
            si alturaModificada entonces
                equilDer(a, alturaModificada);
            fsi
        sino
            si a↑.izq = nil entonces
                aux := a;
                a := a↑.der;
                disponer(aux);
                alturaModificada := verdad
            sino_si a↑.der = nil entonces
                aux := a;
                a := a↑.izq;
                disponer(aux);
                alturaModificada := verdad
            sino
                borrarMaxClave(a↑.izq, a↑.laClave, a↑.elValor, alturaModificada);
                si alturaModificada entonces
                    equilIzq(a, alturaModificada);
                fsi
            fsi
        fsi
    fsi
fin
```

```
procedimiento equilIzq(e/s a: avl; e/s alturaModificada: booleano)
procedimiento equilDer(e/s a: avl; e/s alturaModificada: booleano)
{... estudio de casos (similar inserción)...}

procedimiento borrarMaxClave(e/s a: avl; sal c: clave; sal v: valor; e/s alturaModificada: booleano)
variable
    aux: avl
principio
    si a↑.der = nil entonces
        c := a↑.laClave;
        v := a↑.elValor;
        aux := a;
        a := a↑.izq;
        disponer(aux);
        alturaModificada := verdad
    sino
        borrarMaxClave(a↑.der, c, v, alturaModificada);
        si alturaModificada entonces
            equilDer(a, alturaModificada);
        fsi
    fsi
fin

procedimiento buscar(ent a: avl; ent c: clave; sal éxito: booleano; sal v: valor)
{... igual que en árboles binarios de búsqueda...}
```

Applets

- http://people.ksp.sk/~kuko/bak/
- http://webdiis.unizar.es/asignaturas/EDA/AVLTree/avltree.html
- http://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/AVLtree.html

Trabajo encargado

Leer lección 14. Ejercicios 1, 2, y 3 de la hoja de problemas 4

Estructuras de Datos y Algoritmos

Árboles AVL

Lección 14

Universidad Zaragoza

1542

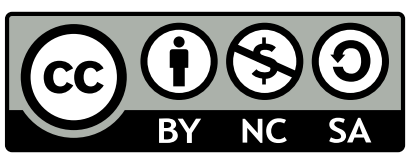
Dpto. de Informática e Ingeniería de Sistemas
Universidad de Zaragoza, España

Curso 2023/2024

Grado en Ingeniería Informática

Universidad de Zaragoza

Aula 0.04, Edificio Agustín de Betancourt



Adaptadas de diapositivas de Javier Campos