Ejercicios Tema 1

Algoritmia para problemas difíciles

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería y Arquitectura – Universidad de Zaragoza

25 de septiembre de 2023

Ejercicios sobre problemas intratables

Para la solución de estos ejercicios se pueden utilizar **únicamente** los problemas intratables y débilmente intratables vistos en el **tema 1**.

Ejercicio 1 Dada una reducción de un problema A a un problema B con la siguiente estructura:

A(x)
for $i = 1$ **to** $k(x)$
    Calcula y_i (a partir de $x, z_1, \ldots, z_{i-1}$)
    Calcula $z_i = B(y_i)$
Calcula *Resultado* a partir de $z_1, \ldots, z_{k(x)}$
Devuelve *Resultado*

encontrar las condiciones necesarias para que dado un problema intratable débil A (es decir, A no se puede resolver en tiempo cuasilineal) la reducción demuestre que B es intratable débil.

Ejercicio 2 Demostrar que el siguiente problema es intratable:
Problema: Cubrimiento, independiente
Entrada: Un grafo G y un entero k.
Salida: ¿Contiene G un cubrimiento de k vértices y un conjunto independiente de k vértices?

Ejercicio 3 Demostrar que el siguiente problema es intratable:
Problema: Subgrafo poco denso
Entrada: Un grafo G y enteros k, y.
Salida: ¿Contiene G un subgrafo con exactamente k vértices y como mucho y aristas?
Nota: Un subgrafo de G es un grafo H formado por un conjunto U de vértices de G y todas las aristas entre los vértices de U que existan en G.

Ejercicio 4 Un camino simple P es un camino sin vértices repetidos. Demostrar que el problema definido a continuación es intratable: Dado un grafo G y un entero k, ¿existe un camino simple de k vértices en G?

Ejercicio 5 Un camino hamiltoniano es un camino sin vértices repetidos que pasa por todos los vértices (no necesariamente cerrado). Demostrar que el problema definido a continuación es intratable: Dado un grafo G y u, v dos vértices de G, ¿existe un camino hamiltoniano de G que empiece en u y termine en v?

Ejercicio 6 Dada una colección C de conjuntos sobre un universo U, un hitter es un conjunto $H \subseteq U$ tal que cada conjunto en C comparte al menos un elemento con H. Por ejemplo, $H = \{2, 3\}$ es hitter para la colección $C = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}\}$, porque H alcanza cada conjunto en C al menos una vez. El problema de HITTER es: dada una colección de conjuntos C y un entero k, ¿existe un H que sea hitter para C con $|H| = k$? Demostrar que HITTER es intratable.

Ejercicio 7 Supongamos que un amigo quiere ingresar en la fraternidad Kappa, para lo que le piden superar una serie de pruebas. Su prueba para esta semana es organizar todas las botellas de la colección de botellas de cerveza de Kappa en un círculo, sujeto a la restricción de que cada par de botellas consecutivas son de botellas de cerveza que se bebieron en una misma fiesta Kappa. Le han dado una lista de las botellas de la colección y, para cada una de ellas, le dicen qué otras botellas se bebieron a la vez en alguna fiesta Kappa. Prueba que le han pedido que resuelva un problema intratable.

Ejercicio 8 Sea Cuadruple-SAT el problema de dado un circuito booleano CNF con una salida decidir si tiene por lo menos cuatro asignaciones distintas que lo satisfagan. Demostrar que Cuadruple-SAT es intratable.

Ejercicio 9 En el problema *Quinto-SAT* se nos da C una fórmula booleana CNF con n variables y m cláusulas, donde m es múltiplo de 5. Queremos determinar si existe una asignación de verdad para las variables de C de tal manera que exactamente un quinto de las cláusulas evalúan a cierto y exactamente cuatro quintos de las cláusulas evalúan a falso. Demostrar que *Quinto-SAT* es intratable con una reducción desde *SAT*.
Notación: Un *literal* es una variable booleana afirmada o negada (p. ej. x, $\neg y$, etc). Una *cláusula* es una disyunción de literales (p. ej. $(x \vee \neg y)$). Una *fórmula en CNF* es una conjunción de cláusulas (p. ej. $(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (\neg x)$).
Pistas: Una fórmula puede tener cláusulas repetidas. Es posible escribir cláusulas que siempre sean ciertas.

Ejercicio 10 Demostrar que el siguiente problema es intratable:
Problema: Gran Clique
Entrada: Un grafo G de n vértices.
Salida: ¿Contiene G un clique de al menos $4n/5$ vértices?

Ejercicio 11 Sea *Partial-SAT* el problema de dado un circuito booleano CNF con una salida y M claúsulas, y $K \leq M$. decidir si tiene una asignación que satisfaga al menos K cláusulas. Demostrar que *Partial-SAT* es intratable.

Ejercicio 12 Dado un grafo G con un conjunto de vértices V, un conjunto dominante de G es un subconjunto $U \subseteq V$ de forma que para cualquier vértice $v \in V$ existe un $u \in U$ tal que la arista (u, v) está en el grafo G.
Demostrar que el siguiente problema es intratable:
Problema: Dominating-Set
Entrada: Un grafo G y un entero k.
Salida: ¿Tiene G un conjunto dominante de k vértices?

Ejercicio 13 Demostrar que el siguiente problema es intratable:
Problema: 5-SAT
Entrada: Un circuito booleano en CNF C con una única salida, en el que cada puerta OR contiene exactamente 5 entradas distintas.
Salida: ¿Existe una asignación de las entradas de C que da salida Cierto?

Ejercicio 14 Consideramos una variante del problema Alineamiento visto en clase, en la que se considera poco conveniente que haya muchas inserciones seguidas, es decir, se preferirá el primer alineamiento al segundo:

```
ACG-G-TT   ACG--GTT
ACGGGGTT   ACGGGGTT
```

Para ello hay una penalización diferente para la primera inserción de un bloque de inserciones que para las siguientes inserciones seguidas. Llamamos a este problema *Alineamiento plus*: Datos de entrada: Dos cadenas A y B, tres reales no negativos $c_{\text{primindel}}$, $c_{\text{nextindel}}$ y c_{sust}. Buscamos: Una optimización de las inserciones, borrados y cambios que me han llevado de una a otra cadena, teniendo en cuenta que siempre que haya varias inserciones seguidas la primera inserción tendrá coste $c_{\text{primindel}}$ y el resto de las inserciones tendrán coste $c_{\mathrm{nextindel}}$. De forma análoga se tratará el coste de varios borrados seguidos. Demostrar que *Alineamiento plus* es intratable débil.

En caso de entregar alguno de estos ejercicios, la fecha límite es el viernes 6 de octubre.

Antes de realizar cualquiera de estos ejercicios el alumno debe seleccionarlo en moodle.

Cualquier fuente utilizada en la resolución de estos ejercicios debe ser indicada claramente en la solución.