

Ejercicios Tema 1

Algoritmia para problemas difíciles

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería y Arquitectura – Universidad de Zaragoza

3 de octubre de 2022

Ejercicios sobre problemas intratables

Para la solución de estos ejercicios se pueden utilizar **únicamente** los problemas intratables y débilmente intratables vistos en el **tema 1**.

Ejercicio 1 Sea Triple-SAT el problema de dado un circuito booleano CNF con una salida decidir si tiene por lo menos tres asignaciones distintas que lo satisfagan. Demostrar que Triple-SAT es intratable.

Ejercicio 2 En el problema *Tercio-SAT* se nos da C una fórmula booleana CNF con n variables y m cláusulas, donde m es múltiplo de 3. Queremos determinar si existe una asignación de verdad para las variables de C de tal manera que exactamente un tercio de las cláusulas evalúan a cierto y exactamente dos tercios de las cláusulas evalúan a falso. Demostrar que *Tercio-SAT* es intratable con una reducción desde *SAT*.

Notación: Un *literal* es una variable booleana afirmada o negada (p. ej. x , $\neg y$, etc). Una *cláusula* es una disyunción de literales (p. ej. $(x \vee \neg y)$). Una *fórmula en CNF* es una conjunción de cláusulas (p. ej. $(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (\neg x)$).

Pistas: Una fórmula puede tener cláusulas repetidas. Es posible escribir cláusulas que siempre sean ciertas.

Ejercicio 3 Demostrar que el siguiente problema es intratable:

Problema: Gran Clique

Entrada: Un grafo G de n vértices.

Salida: ¿Contiene G un clique de al menos $3n/4$ vértices?

Ejercicio 4 Sea *Partial-SAT* el problema de dado un circuito booleano CNF con una salida y M cláusulas, y $K \leq M$. decidir si tiene una asignación que satisfaga al menos K cláusulas. Demostrar que *Partial-SAT* es intratable.

Ejercicio 5 Dado un grafo G con un conjunto de vértices V , un conjunto dominante de G es un subconjunto $U \subseteq V$ de forma que para cualquier vértice $v \in V$ existe un $u \in U$ tal que la arista (u, v) está en el grafo G .

Demostrar que el siguiente problema es intratable:

Problema: Dominating-Set

Entrada: Un grafo G y un entero k .

Salida: ¿Tiene G un conjunto dominante de k vértices?

Ejercicio 6 Demostrar que el siguiente problema es intratable:

Problema: 4-SAT

Entrada: Un circuito booleano en CNF C con una única salida, en el que cada puerta OR contiene exactamente 4 entradas distintas.

Salida: ¿Existe una asignación de las entradas de C que da salida Cierto?

Ejercicio 7 Consideramos una variante del problema Alineamiento visto en clase, en la que se considera poco conveniente que haya muchas inserciones seguidas, es decir, se preferirá el primer alineamiento al

segundo:

ACG-G-TT ACG--GTT
 ACGGGGTT ACGGGGTT

Para ello hay una penalización diferente para la primera inserción de un bloque de inserciones que para las siguientes inserciones seguidas. Llamamos a este problema *Alineamiento plus*: Datos de entrada: Dos cadenas A y B , tres reales no negativos $c_{\text{primindel}}$, $c_{\text{nextindel}}$ y c_{sust} . Buscamos: Una optimización de las inserciones, borrados y cambios que me han llevado de una a otra cadena, teniendo en cuenta que siempre que haya varias inserciones seguidas la primera inserción tendrá coste $c_{\text{primindel}}$ y el resto de las inserciones tendrán coste $c_{\text{nextindel}}$. De forma análoga se tratará el coste de varios borrados seguidos. Demostrar que *Alineamiento plus* es intratable débil.

Ejercicio 8 Dada una reducción de un problema A a un problema B con la siguiente estructura:

```
A(x)
1  for  $i = 1$  to  $k(x)$ 
2      Calcula  $y_i$  (a partir de  $z_1, \dots, z_{i-1}$ )
3      Calcula  $z_i = B(y_i)$ 
4  Cálcula Resultado a partir de  $z_1, \dots, z_k$ 
5  Devuelve Resultado
```

encontrar las condiciones necesarias para que dado un problema intratable débil A (es decir, A no se puede resolver en tiempo cuasilineal) la reducción demuestre que B es intratable débil.

Ejercicio 9 Demostrar que el siguiente problema es intratable:

Problema: Cubrimiento, independiente

Entrada: Un grafo G y un entero k .

Salida: ¿Contiene G un cubrimiento de k vértices y un conjunto independiente de k vértices?

Ejercicio 10 Demostrar que el siguiente problema es intratable:

Problema: Subgrafo poco denso

Entrada: Un grafo G y enteros k, y .

Salida: ¿Contiene G un subgrafo con exactamente k vértices y como mucho y aristas?

Nota: Un subgrafo de G es un grafo H formado por un conjunto U de vértices de G y todas las aristas entre los vértices de U que existan en G .

Ejercicio 11 Un camino simple P es un camino sin vértices repetidos. Demostrar que el problema definido a continuación es intratable: Dado un grafo G y un entero k , ¿existe un camino simple de k vértices en G ?

Ejercicio 12 Un camino hamiltoniano es un camino sin vértices repetidos que pasa por todos los vértices (no necesariamente cerrado). Demostrar que el problema definido a continuación es intratable: Dado un grafo G y u, v dos vértices de G , ¿existe un camino hamiltoniano de G que empiece en u y termine en v ?

Ejercicio 13 Dada una colección C de conjuntos sobre un universo U , un hitter es un conjunto $H \subseteq U$ tal que cada conjunto en C comparte al menos un elemento con H . Por ejemplo, $H = \{2, 3\}$ es hitter para la colección $C = \{\{1, 2, 4\}, \{3, 4, 5\}, \{1, 2, 5, 6\}\}$, porque H alcanza cada conjunto en C al menos una vez. El problema de HITTER es: dada una colección de conjuntos C y un entero k , ¿existe un H que sea hitter para C con $|H| = k$? Demostrar que HITTER es intratable.

Ejercicio 14 Supongamos que un amigo quiere ingresar en la fraternidad Tau Nu Tau (TNT), para lo que le piden superar una serie de pruebas. Su prueba para esta semana es organizar todas las botellas de la colección de botellas de cerveza de TNT en un círculo, sujeto a la restricción de que cada par de botellas consecutivas son de botellas de cerveza que se bebieron en una misma fiesta TNT. Le han dado

una lista de las botellas de la colección y, para cada una de ellas, le dicen qué otras botellas se bebieron a la vez en alguna fiesta TNT. Prueba que le han pedido que resuelva un problema intratable.

En caso de entregar alguno de estos ejercicios, la fecha límite es el viernes 14 de octubre.

Antes de realizar cualquiera de estos ejercicios el alumno debe seleccionarlo en moodle.

Cualquier fuente utilizada en la resolución de estos ejercicios debe ser indicada claramente en la solución.