

## Ejercicios Tema 1

### Algoritmia para problemas difíciles

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas  
Escuela de Ingeniería y Arquitectura – Universidad de Zaragoza

8 de octubre de 2018

#### Ejercicios sobre NP-difíciles

---

**Ejercicio 1** Demostrar que el siguiente problema es intratable:

*Problema:* Clique, independiente

*Entrada:* Un grafo  $G$  y un entero  $k$ .

*Salida:* ¿Contiene  $G$  un clique de  $k$  vértices y un conjunto independiente de  $k$  vértices?

**Ejercicio 2** Demostrar que el siguiente problema es intratable:

*Problema:* Subgrafo denso

*Entrada:* Un grafo  $G$  y enteros  $k, y$ .

*Salida:* ¿Contiene  $G$  un subgrafo con exactamente  $k$  vértices y al menos  $y$  aristas?

**Ejercicio 3** Explicar detalladamente un algoritmo en tiempo polinómico para resolver 2-SAT (ver definición en transparencias).

**Ejercicio 4** Demostrar que los siguientes problemas están en NP:

- ¿El grafo  $G$  tiene un camino simple (es decir, sin repetir vértices) de longitud  $k$ ?
- ¿Es  $n$  un entero compuesto (es decir, no es primo)?
- ¿Tiene un grafo  $G$  una cobertura de vértices de tamaño  $k$ ?

**Ejercicio 5** Sea *GUERRA-HIPER-COMUNIDADES* el siguiente problema: Dada una gran colección de  $n$  páginas web y un número  $k$  se pretende saber si existen dos comunidades rivales de fuerza  $k$ , es decir, dos conjuntos disjuntos  $A_1, A_2$  de  $k$  páginas web cada uno, de forma para dos páginas cualquiera  $x, y$  del mismo  $A_i$  la página  $x$  tiene un hipervínculo a la  $y$  (y viceversa). Demostrar que *GUERRA-HIPER-COMUNIDADES* es un problema intratable.

**Ejercicio 6** En el problema *Medio-SAT* se nos da  $C$  una fórmula booleana CNF con  $n$  variables y  $m$  cláusulas, donde  $m$  es par. Queremos determinar si existe una asignación de verdad para las variables de  $C$  de tal manera que exactamente la mitad de las cláusulas evalúan a falso y exactamente la mitad de las cláusulas evalúan a cierto. Demostrar que *Medio-SAT* es intratable con una reducción desde *SAT*.

**Notación:** Un *literal* es una variable booleana afirmada o negada (p. ej.  $x, \neg y$ , etc). Una *cláusula* es una disyunción de literales (p. ej.  $(x \vee \neg y)$ ). Una *fórmula en CNF* es una conjunción de cláusulas (p. ej.  $(x \vee \neg y \vee z) \wedge (\neg z \vee y) \wedge (\neg x)$ ).

**Pistas:** Una fórmula puede tener cláusulas repetidas. Se pueden escribir cláusulas que siempre sean ciertas.

**Ejercicio 7** Supongamos que se nos da un programa que puede resolver el problema decisional *TSP* (transparencia 48) en, por ejemplo, tiempo lineal. Se pide un algoritmo eficiente para encontrar el recorrido óptimo de TSP con un número polinómico de llamadas a dicho programa.

**Ejercicio 8** Diseñar e implementar un algoritmo de backtracking para probar si un circuito CNF es satisfacible. ¿Qué criterios se pueden utilizar para podar esta búsqueda?

**Ejercicio 9** En el problema *Medio-VC* se nos da  $G$  un grafo de  $n$  vértices y  $m$  aristas y un natural  $k$ . Queremos determinar si existe un conjunto de  $k$  vértices que cubra la mitad de las aristas del grafo. Demostrar que *Medio-VC* es intratable con una reducción desde *Cobertura de Vértices*.

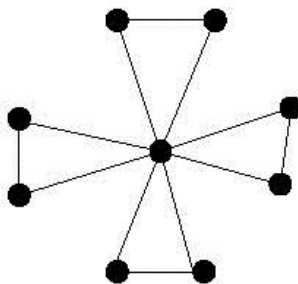
**Ejercicio 10** Un ejemplo del problema de *Cobertura por Conjuntos* se compone de un conjunto  $X$  de  $n$  elementos, una familia  $F$  de subconjuntos de  $X$  y un entero  $k$ . La pregunta es, ¿existen  $k$  subconjuntos de los de  $F$  cuya unión es  $X$ ?

Por ejemplo, si  $X = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $F = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$ , no existe una solución para  $k = 2$ , pero sí existe para  $k = 3$  (por ejemplo,  $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}$ ). Demostrar que *Cobertura por Conjuntos* es intratable con una reducción desde *Cobertura de Vértices*.

**Ejercicio 11** El problema *Árbol de recubrimiento de bajo grado* es el siguiente: dado un grafo  $G$  y un entero  $k$ , ¿contiene  $G$  un árbol de recubrimiento tal que todos los vértices del árbol tienen grado como mucho  $k$  (obviamente, sólo las aristas en el árbol cuentan para el grado)?

(Para la definición de árbol de recubrimiento o *spanning tree* se pueden ver el libro de Skiena o los apuntes de AB (tema 2, transparencia 40)).

Por ejemplo, en el siguiente grafo, no hay ningún de recubrimiento de tal manera que todos los vértices tienen un grado menor que tres.



1. Demostrar que problema *Árbol de recubrimiento de bajo grado* es intratable con una reducción desde *camino Hamiltoniano* (*camino Hamiltoniano* es un problema similar a *ciclo Hamiltoniano* pero en el que se busca un camino sin repeticiones y por todos los vértices que no tiene que ser cerrado).
2. Ahora considerar el problema *Árbol de recubrimiento de alto grado*, que es como sigue. Dado un grafo  $G$  y un entero  $k$ , ¿contiene  $G$  un árbol de recubrimiento tal que el mayor grado de un vértice es por lo menos  $k$ ? En el ejemplo anterior, existe un árbol de recubrimiento con grado más alto 8. Dar un algoritmo eficiente para resolver el problema *Árbol de recubrimiento de alto grado*, y un análisis de su complejidad en tiempo.

En caso de entregar alguno de estos ejercicios, la fecha límite es el lunes 22 de octubre.
--

Antes de realizar cualquiera de estos ejercicios el alumno debe enviar un correo a <a href="mailto:elvira@unizar.es">elvira@unizar.es</a> indicando qué ejercicio desea realizar.
---

Cualquier fuente utilizada en la resolución de estos ejercicios debe ser indicada claramente en la solución.
--