Algoritmos aproximados

Elvira Mayordomo

Universidad de Zaragoza

23 de noviembre de 2017

Contenido de este tema

1. **Introducción**
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. Set cover
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. Resumen

Contenido de este tema

Este tema está basado en:

- El capítulo 6 (6.8) de Steven S. Skiena. The Algorithm Design Manual. Springer 2008.
- El capítulo 35 de T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein. Introduction to Algorithms. The MIT Press 2009.
- El capítulo 13 de G. Brassard, P. Bratley. Fundamentos de Algoritmia. Prentice Hall 1997.

Motivación: Salvando los NP-difíciles

- Tiempo exponencial puede ser aceptable para las pequeñas entradas (Fuerza bruta).
- A veces se pueden aislar los casos especiales que se pueden ejecutar en tiempo polinomial (técnicas de AB).
- Soluciones casi óptimas pueden ser aceptables (algoritmos de aproximación).
- Veremos como algunos NP-difíciles tienen algoritmos de aproximación muy buenos mientras que para otros aproximar mínimamente es tan difícil como resolver el problema.

Contenido de este tema

1. Introducción
2. **Problemas de optimización**
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. Set cover
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. Resumen

Problemas de optimización

- En este tema nos centraremos en resolver *problemas de optimización*.
- Nos conformaremos con soluciones aproximadas.

Problemas de optimización

- Se trata de:
  - Buscar la solución (camino, etc) más grande/larga, etc que cumpla ...
  - Buscar la solución (camino, etc) más pequeña/corta, etc que cumpla ...
- En general tenemos:
  - Para cada entrada un espacio de **soluciones candidatas** (por ejemplo, caminos)
  - Una medida de bondad de la solución, **coste** o función objetivo (por ejemplo, la longitud del camino)
- **Optimizar** = buscar la mejor solución o solución óptima

Ratios de aproximación

- $c(x)$ es el coste de la solución óptima
- $\hat{c}(x)$ es el coste de la solución producida por el algoritmo de aproximación
- Un algoritmo tiene una ratio de aproximación de $\rho(n)$ si para una entrada x de tamaño n, $\hat{c}(x)$ está dentro de un factor de $\rho(n)$ de $c(x)$

Ratios de aproximación

- Problema de **maximización**
  - $0 < \hat{c}(x) \leq c(x)$
  - $c(x)/\hat{c}(x)$ factor por el cual el coste de la solución óptima es mayor que el coste de la solución aproximada

$$\rho(n) = \max_{|x|=n} \frac{c(x)}{\hat{c}(x)}$$

- Problema de **minimización**
  - $0 < c(x) \leq \hat{c}(x)$
  - $\hat{c}(x)/c(x)$ factor por el cual el coste de la solución aproximada es mayor que el coste de la solución óptima

$$\rho(n) = \max_{|x|=n} \frac{\hat{c}(x)}{c(x)}$$

¿Cómo funcionan los algoritmos de optimización

- Explotan la naturaleza del problema
- Usan técnicas voraces
- Usan programación lineal
- Usan programación dinámica
- ...

Recordad

- $c(x)$ es el coste de la solución óptima **(no sabemos cómo conseguirlo)**
- $\hat{c}(x)$ **es el coste conseguido por el algoritmo** de aproximación
- $\rho(n)$ es el máximo (para $|x| = n$) del ratio entre $c(x)$ y $\hat{c}(x)$ (en el orden adecuado, siempre ≤ 1)
- Cuanto más cerca de 1 está $\rho(n)$ mejor es la aproximación (con $\rho(n) = 1$ tenemos aproximación perfecta)

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. **Diferentes tipos de aproximación**
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. Set cover
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. Resumen

Diferentes tipos de aproximación

(Supongamos que se trata de un problema de maximización)

- Ratio de aproximación logarítmico (**log-aproximable**)

$$c(x)/\hat{c}(x) \leq \rho(n) = O(\log n)$$

- Ratio de aproximación B (constante) (B-**aproximable**)

$$c(x)/\hat{c}(x) \leq \rho(n) \leq B$$

- Ratio de aproximación asintóticamente pequeño (ϵ-**aproximable**)

$$\forall \epsilon, c(x)/\hat{c}(x) \leq \rho(n) \leq (1+\epsilon)$$

- **FPTAS** ("Full polynomial time approximation scheme"): el algoritmo de aproximación tiene ratio de aproximación asintóticamente pequeño y el tiempo para ratio ϵ y entradas de tamaño n es polinómico en n y $1/\epsilon$

Diferentes tipos de aproximación

- Para cualquiera de los tipos de aproximación anteriores, el problema puede ser no aproximable (si P$\neq$NP), por ejemplo
  Para cualquier B, TSP no es B aproximable (si P$\neq$NP)
  es decir, para cualquier B, B-aproximar TSP es tan difícil como resolverlo

Resumiendo

- Los diferentes tipos de aproximación dependen de lo grande que pueda ser $\rho(n)$ (cuanto más pequeño $\rho(n)$ mejor aproximación)
- Nos interesarán los tres casos de $\rho(n)$ constante, logarítmico, asintóticamente cercano a 1
- Veremos muchos algoritmos de aproximación y algún resultado negativo (no existen algoritmos que aproximen con ratio x)

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. **Cobertura de Vértices**
5. TSP métrico
6. Set cover
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. Resumen

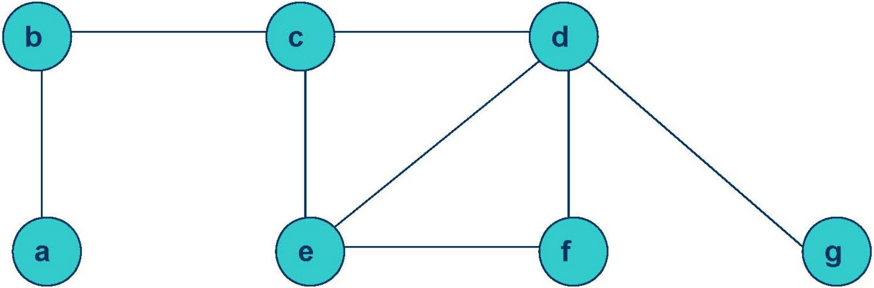
Cobertura de Vértices

Problema: Cobertura de Vértices
Entrada: Un grafo G (con vértices V) y $k \in \mathbb{N}$.
Salida: ¿Existe un conjunto U de k vértices de G tal que cada arista (i, j) de G cumple que $i \in U$ ó $j \in U$?

- Cobertura de Vértices es NP-difícil
- Vamos a considerar la versión de optimización, encontrar un cubrimiento óptimo

Problema: VC
Entrada: Un grafo G (con vértices V).
Salida: Encontrar un conjunto lo menor posible U de vértices de G tal que cada arista (i, j) de G cumple que $i \in U$ ó $j \in U$

Considerar el grafo ...

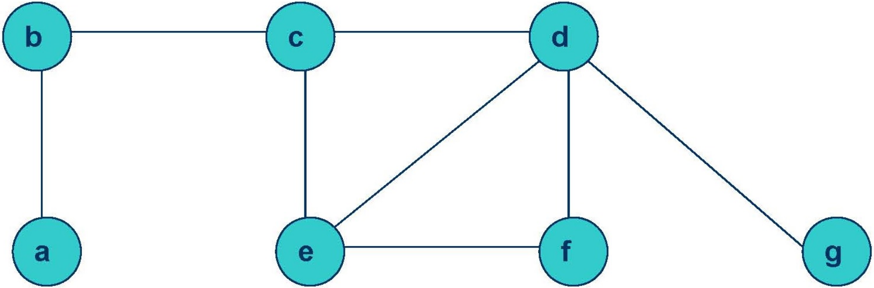


- Por inspección, el cubrimiento óptimo es $\{b, d, e\}$
- $c(G) =$ tamaño de la solución óptima $= 3$

Algoritmo de aproximación de VC

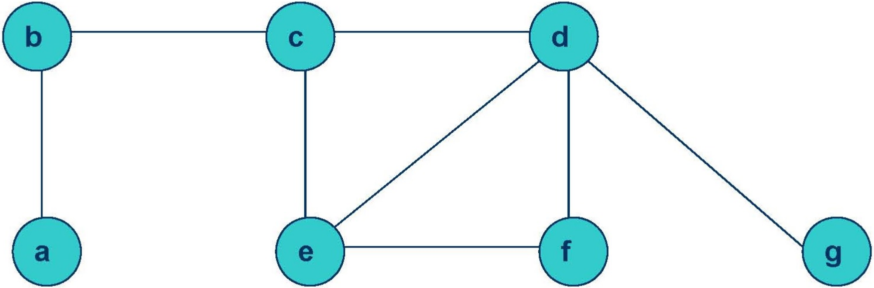
```
APROXVC(G)
U = ∅
E′ = aristas de G
while E′ ≠ ∅
        sea (u, v) ∈ E′
        U = U ∪ {u, v}
        Borrar todas las aristas de E′ que tienen u ó v
Resultado U
```

De vuelta a nuestro grafo ...



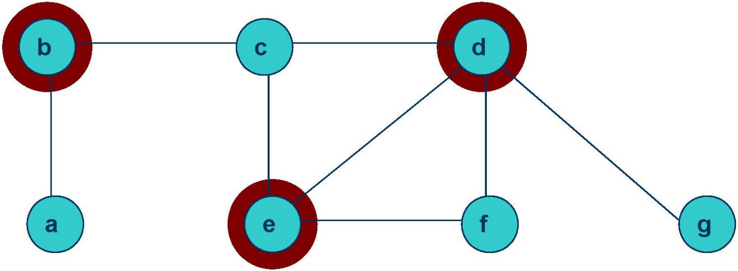
- $E' = \{(a,b)(b,c)(c,d)(c,e)(d,e)(d,f)(d,g)(e,f)\}$
- Cubrimiento aproximado $\hat{c}(G) = 6$

Con más suerte ...



- $E' = \{(d,e)(c,d)(c,e)(d,f)(d,g)(e,f)(b,c)(a,b)\}$
- Cubrimiento aproximado $\hat{c}(G) = 4$

¿Es posible acercarse más a la solución óptima?



- En este caso y con nuestro algoritmo, ¡NO!

Análisis del algoritmo

- Tiempo $O(n+m)$ (n vértices y m aristas)
- 2-aproximación: vamos a verlo (cierto para el ejemplo anterior $\hat{c}(G) = 6$, $c(G) = 3$)

2-aproximable

- $A =$ conjunto de aristas elegidas por el algoritmo AproxVC
- No hay dos aristas de A con un punto en común, así que no hay dos aristas de A cubiertas por el mismo vértice de un cubrimiento
  - cota inferior $c(G) \geq |A|$
- Elegimos una arista para la que ninguno de los dos extremos está ya en U
  - cota superior $\hat{c}(G) = 2|A|$
- Por tanto $2c(G) \geq 2|A| = \hat{c}(G)$
- Luego $\hat{c}(x)/c(x) \leq 2$

VC

- Hemos visto que podemos aproximarlo con un ratio 2
- No se puede aproximar con ratio 1,1666 (si P$\neq$ NP)

Qué hemos aprendido

- Aunque el algoritmo es simple, no es estúpido Por ejemplo, considera la heurística de seleccionar un solo vértice en lugar de los 2 y una estrella ...
- Voraz no es siempre la respuesta Quizás la heurística más natural es seleccionar el vértice de mayor grado ... sin embargo con casi empates puede ir realmente mal y ser $\Theta(\log n)$ aproximado
- Hacer una heurística más complicada no la hace necesariamente mejor Por ejemplo podríamos completar el algoritmo anterior seleccionando la arista con vértices de mayor grado ... pero eso no mejora el caso peor y lo hace más difícil de analizar
- Un paso de limpieza a posteriori no es malo Por ejemplo quitar los vértices innecesarios del resultado puede mejorar el resultado, aunque no el caso peor
- Recuerda que en los algoritmos de aproximación hay que considerar el ratio de aproximación en el **caso peor**, no pensar en casos concretos en los que funcione bien

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. **TSP métrico**
6. Set cover
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. Resumen

TSP

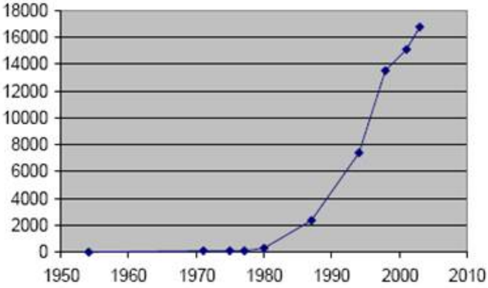
Problema: TSP
Entrada: n el número de ciudades, la matriz de distancias $n \times n$ y cota superior k.
Salida: ¿Existe un recorrido por las n ciudades, sin repeticiones y volviendo al punto de partida con distancia total $\leq k$?

- TSP es NP-difícil
- Vamos a considerar la versión de optimización, encontrar un recorrido óptimo

Problema: TSP minimización
Entrada: n el número de ciudades y M la matriz de distancias $n \times n$.
Salida: Encontrar un recorrido por las n ciudades, sin repeticiones y volviendo al punto de partida con distancia total la mínima posible

Sobre TSP ...

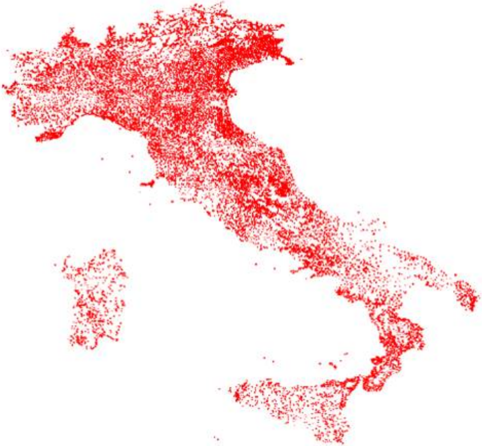
- Prestaciones de los **métodos exactos** para resolver el problema
- Año vs tamaño del problema resuelto óptimamente



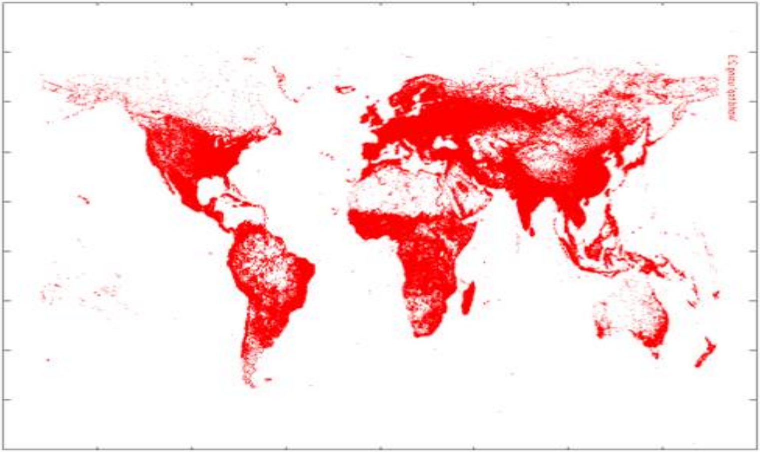
Sobre TSP ...

- El mayor problema resuelto óptimamente hasta 2006 es una entrada de 85.900 ciudades
- Usando heurísticas, varias entradas de millones de ciudades se han resuelto dentro del 1 % de la solución óptima

Sobre TSP ...: solución óptima a ...



Sobre TSP ...: solución heurística a ...



TSP métrico

- La distancia satisface la desigualdad triangular para todas las ciudades u, v, w

$$d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$$

- **TSP métrico sigue siendo NP-difícil**
- Parece una restricción trivial ... ¿o no?
  - Piensa en la distancia definida como tiempo de vuelo entre las dos ciudades No satisface la desigualdad triangular
  - O simplemente en el camino que selecciona un GPS con la opción "Ruta más rápida"
  - O el precio de volar de una ciudad a otra ...

Necesitamos: Eulerianos

- Grafos Eulerianos y circuitos Eulerianos:
  - **Ciclo Euleriano:** ciclo que usa cada arista exactamente una vez
  - **Grafo Euleriano:** grafo con un ciclo Euleriano
  - **Propiedad:** Un grafo es Euleriano si y sólo si cada vértice tiene grado par.

“Spanning trees” o árboles de recubrimiento

- Un **árbol** es un grafo conexo sin ciclos
- Un **spanning tree** de un grafo es un árbol formado por todos los vértices y algunas aristas
- Un **spanning tree mínimo** es el que tiene menor distancia total

Algoritmo de aproximación de TSP métrico

Problema: TSP métrico
Entrada: n el número de ciudades y M la matriz de distancias $n \times n$ que cumplen la desigualdad triangular.
Salida: Encontrar un recorrido por las n ciudades y volviendo al punto de partida con distancia total la mínima posible

```
APROXMTSP(n, M)
G = grafo con distancias representado por M
Encontrar T un spanning tree mínimo de G
Doblar cada arista de T para obtener G' que es un grafo Euleriano
Encontrar E un circuito Euleriano de G'
F = los vértices de G en el orden que aparecen por primera vez en E
Resultado:F
```

Análisis del algoritmo: tiempo

- Encontrar T un spanning tree mínimo de G
  - **Algoritmo de Kruskal** (Visto en AB: coste $O(n^2 \log n)$):
  - Se basa en la propiedad de los árboles de recubrimiento de coste mínimo: Partiendo del árbol vacío, se selecciona en cada paso la arista de menor etiqueta que no provoque ciclo sin requerir ninguna otra condición sobre sus extremos.
- Encontrar E un circuito Euleriano de G'
  - Se trata de atravesar T en profundidad ($O(n^2)$)
  - En general se puede encontrar un circuito Euleriano de cualquier grafo en tiempo $O(m)$ (m es el número de aristas)
- **Tiempo total:** $O(n^2 \log n + n^2) = O(n^2 \log n)$

Algoritmo de aproximación de TSP métrico

ApproxMTSP(n, M)

G = grafo con distancias representado por M
Encontrar T un spanning tree mínimo de G
Duplicar cada arista de T para obtener G' que es un grafo Euleriano
Encontrar E un circuito Euleriano de G'
F = los vértices de G en el orden que aparecen por primera vez en E
Resultado: F

Análisis del algoritmo: aproximación

- Es una 2-aproximación:
  - El resultado es F es quitar vértices repetidos a E circuito Euleriano ($\hat{c}(n, M) = c(F)$)
  - $\hat{c}(n, M) \leq c(E)$ Por la **desigualdad triangular**, nos quedamos con la primera aparición de cada vértice
  - $c(E) \leq 2c(T)$ (cada arista de T está duplicada)
  - **Cota inferior** $\hat{c}(n, M) \leq c(E) \leq 2c(T)$
  - **Cota superior** $c(T) \leq c(n, M)$ Porque si quitamos una arista de un recorrido se convierte en un árbol, y T es el árbol de coste mínimo
  - $\hat{c}(n, M) \leq 2c(T) \leq 2c(n, M)$
  - Luego $\hat{c}(n, M)/c(n, M) \leq 2$

¿Podemos mejorar la aproximación?

- El punto crítico es $c(E) \leq 2c(T)$
- Se debe a que hay que "Duplicar cada arista de T para obtener G' que es un grafo Euleriano"
- Si podemos evitar esta duplicación podemos mejorar la aproximación
- Existen algoritmos menos costosos para convertir T en un grafo Euleriano
- Se basan sólo en los vértices de grado impar y usan "perfect matching"
- Con esta idea se puede mejorar la aproximación a 1,5
- Es el famoso algoritmo de Christofides (1976)

TSP métrico

- Tenemos una aproximación con ratio 1,5
- No se puede aproximar con ratio 1,013 (si P$\neq$ NP)

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. **Set cover**
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. Resumen

Set Cover

Problema: Set Cover
Entrada: Una colección $S_1, \ldots, S_m$ de m conjuntos, $k \leq m$.
Salida: ¿Existen $i_1, \ldots i_k$ con

$$S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k} = S_1 \cup \ldots \cup S_m,$$

es decir, que la unión de los k sea la misma que la de la colección completa?

- Importante: k es el **número de subconjuntos**, no de elementos
- Ejemplo: Sean m expertos y $S_1, \ldots, S_m$ las destrezas que aporta cada uno de los expertos, $k \leq m$. ¿Podemos nombrar un comité de k expertos o menos que cubran todas las destrezas?

Set Cover

- Set Cover es NP-difícil
- Vamos a considerar la **versión de optimización**, encontrar una subcolección óptima

Problema: Opt-Set-Cover
Entrada: Una colección $S_1, \ldots, S_m$ de m conjuntos.
Salida: Encontrar $i_1, \ldots i_k$ con k el menor posible y

$$S_{i_1} \cup \ldots \cup S_{i_k} = S_1 \cup \ldots \cup S_m$$

Algoritmo de aproximación de Set cover (voraz)

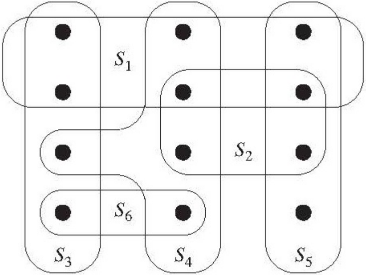
- Se trata de elegir el S_i con mayor número de elementos de entre los que quedan por cubrir

$\textsc{AproxSC}(S_1, \ldots, S_m)$

$U = \{S_1, \ldots, S_m\}$
$W = \emptyset$
$B = S_1 \cup \ldots \cup S_m$
while $B \neq \emptyset$
    sea A el conjunto de U con más elementos de B
    Borrar A de U
    Añadir A a W
    Borrar todos los elementos en A de B
Resultado W

- Tiempo polinómico en n y m ($\min(n, m)$ iteraciones de $O(nm)$, con $n = |S_1 \cup \ldots \cup S_m|$)

Ejemplo de aplicación del algoritmo



$\lvert U\rvert$	12	6	3	1	0
$\lvert S_1\rvert$	**6**	X	X	X	X
$\lvert S_2\rvert$	4	2	1	X	X
$\lvert S_3\rvert$	4	2	1	**1**	X
$\lvert S_4\rvert$	5	**3**	X	X	X
$\lvert S_5\rvert$	4	2	**2**	X	X
$\lvert S_6\rvert$	2	2	1	1	X

Ejemplo de aplicación del algoritmo

El resultado del algoritmo es $k = 4$, $W = \{S_1, S_4, S_5, S_3\}$

Algoritmo de aproximación de Set cover (voraz)

- Se trata de elegir el S_i con mayor número de elementos de entre los que quedan por cubrir

```
APROXSC(S_1, ..., S_m)
U = {S_1, ..., S_m}
W = ∅
B = S_1 ∪ ... ∪ S_m
while B ≠ ∅
      sea A el conjunto de U con más elementos de B
      Borrar A de U
      Añadir A a W
      Borrar todos los elementos en A de B
Resultado W
```

Análisis del algoritmo (delicado)

- Es una $\log n$-aproximación, con $n = |S_1 \cup \ldots \cup S_m|$:
  - Los A elegidos cubren cada vez menos elementos de B
  - Vamos a fijarnos en cuando quedan en B: $2^{\lceil \log n \rceil - 1}$, ..., 2^i, ...
  - Sea w_i el número de As seleccionados desde la primera vez que quedan $\leq 2^{i+1} - 1$ hasta la primera vez que quedan $\leq 2^i$ (Fase i)
  - $w = \max w_i$
  - $\hat{c}(S_1, \ldots, S_m) \leq w \log n$

Análisis del algoritmo (delicado)

- **También se cumple** que $c(S_1, \ldots, S_m) \geq w$
  - En la fase i se cubren unos 2^i elementos (desde $\leq 2^{i+1} - 1$ hasta $\leq 2^i$)
  - Los conjuntos elegidos cubren cada vez menos elementos
  - Nos quedamos justo antes de coger el último A de la fase i, llamamos B' a ese B
  - El último A seleccionado en la fase i cubre $\leq 2^i/w_i$ elementos de B' (porque es el que menos cubre y entre w_i conjuntos cubren 2^i elementos)
  - No existe ningún S_r que cubra más de $2^i/w_i$ elementos de B'
  - Luego necesito al menos w_i conjuntos S_r que cubran B'
  - Luego $c(S_1, \ldots, S_m) \geq w_i$
  - Como se cumple para cualquier i, $c(S_1, \ldots, S_m) \geq w$ ($w = \max w_i$)

Análisis del algoritmo (delicado)

- Hemos visto $\hat{c}(S_1, \ldots, S_m) \leq w \log n$
- También que que $c(S_1, \ldots, S_m) \geq w$
- $\hat{c}(S_1, \ldots, S_m) \leq w \log n \leq c(S_1, \ldots, S_m) \log n$
- Luego $\hat{c}(S_1, \ldots, S_m)/c(S_1, \ldots, S_m) \leq \log n$
- El análisis es exacto, hay casos en que $\hat{c}(S_1, \ldots, S_m)/c(S_1, \ldots, S_m) = \log n$

Set Cover

- Lo anterior da una aproximación muy mala (???) (ratio no constante) ...
- No se puede aproximar con ratio $1 + \epsilon$ para ningún ϵ (si P$\neq$ NP)

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. Set cover
7. **Mochila**
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. Resumen

Mochila

- Recordemos el problema de la mochila:
  - Se tienen n objetos NO fraccionables y una mochila.
  - El objeto i tiene peso $p_i \in \mathbb{R}^+$ y produce beneficio $b_i \in \mathbb{R}^+$
  - El objetivo es llenar la mochila, de capacidad $C \in \mathbb{R}^+$, de manera que se maximice el beneficio

Problema: Mochila
Entrada: $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots p_n \in \mathbb{R}^+$, $b_1, \ldots b_n \in \mathbb{R}^+$, $C \in \mathbb{R}^+$.
Salida: Encontrar $x_1, \ldots, x_n \in \{0, 1\}$ (indicando que el objeto se deja fuera o se mete en la mochila) con

$$\sum_{1 \leq i \leq n} b_i x_i$$

el máximo posible tal que

$$\sum_{1 \leq i \leq n} p_i x_i \leq C$$

Solución con programación dinámica (AB)

- Restringida a pesos p_i y capacidad C números naturales
- Consiste en considerar la $n \times (C+1)$ matriz g con valores

$$g[i,x] = \text{ máximo beneficio con los objetos del 1 al } i \text{ y con capacidad } x$$

- (El beneficio de) la solución buscada es $g[n, C]$
- Para "rellenar" la matriz basta con rellenar la primera fila y la primera columna y después aplicar la regla:

$$g[j,x] = \text{máx}(g[j-1,x], g[j-1,x-p_j]+b_j)$$

- A partir de la matriz es fácil reconstruir los objetos para obtener $g[n, C]$
- Tiempo $O(nC)$, puede ser enorme dependiendo de C

Otra solución con programación dinámica: **Dinam2**

- Restringida a beneficios b_i números naturales
- Sea B el máximo de todos los beneficios, $M = nB$
- Consiste en considerar la $n \times (M+1)$ matriz U con valores

$$U[i,x] = \text{ mínimo peso con los objetos del 1 al } i \text{ y con beneficio } x$$

- La solución buscada tiene beneficio x con x el mayor tal que $U[n,x] \leq C$
- Para "rellenar" la matriz basta con rellenar la primera fila y la primera columna y después aplicar la regla:

$$U[j,x] = \text{mín}(U[j-1,x], U[j-1,x-b_j] + p_j)$$

- A partir de la matriz es fácil reconstruir los objetos para obtener la solución
- Tiempo $O(nM)$, puede ser enorme dependiendo de M

Solución redondeando

- Vamos a utilizar la segunda solución con programación dinámica pero para un problema simplificado
- Fijamos un $R > 0$, **vamos a redondear los beneficios** dividiendo por R
- Sea $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \dots p_n \in \mathbb{R}^+$, $C \in \mathbb{R}^+$, $b_1, \dots b_n \in \mathbb{R}^+$, como en la entrada original y $\hat{b}_1, \dots \hat{b}_n \in \mathbb{N}$ los beneficios (naturales) definidos como sigue:

$$\hat{b}_i = \lfloor b_i / R \rfloor$$

- Es decir, cambiamos de escala los beneficios
- Como $\max \hat{b}_i \leq B/R$ (B es el máximo de los b_i), en tiempo $O(n^2 B/R)$ resolvemos el problema simplificado

Solución redondeando

- $\hat{b}_i = \lfloor b_i/R \rfloor$
- En tiempo $O(n^2 B/R)$ resolvemos el problema simplificado
- Pero un beneficio $\hat{x}$ al problema simplificado supone un beneficio de al menos $R\hat{x}$ al problema original

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sum_A \hat{b}_i = \sum_A \lfloor b_i/R \rfloor \\ R\hat{x} &= \sum_A R\lfloor b_i/R \rfloor \leq \sum_A b_i \end{aligned}$$

- Y un beneficio x al problema original supone un beneficio de al menos $x/R - n$ al problema simplificado

$$\begin{aligned} x &= \sum_A b_i \\ \sum_A \hat{b}_i &= \sum_A \lfloor b_i/R \rfloor \geq \sum_A (b_i/R - 1) \geq \sum_A b_i/R - n \end{aligned}$$

Solución redondeando

- $\hat{b}_i = \lfloor b_i/R \rfloor$
- Tiempo $O(n^2 B/R)$
- Un beneficio $\hat{x}$ al problema simplificado supone un beneficio de al menos $R\hat{x}$ al problema original
- Y un beneficio x al problema original supone un beneficio de al menos $x/R - n$ al problema simplificado

Solución ϵ-aproximada para cualquier $\epsilon < 1$

- Fijamos $\epsilon > 0$
- Vamos a utilizar la solución redondeada con $R = \epsilon B/(2n)$
- Tiempo $O(n^2 B/R) = O(n^2 B/(\epsilon B/(2n))) = O(n^3/\epsilon)$
- Un beneficio $\hat{x}$ al problema simplificado supone un beneficio de al menos $R\hat{x} = \epsilon B/(2n)\hat{x}$ al problema original
- Y un beneficio x al problema original supone un beneficio de al menos $x/R - n = x2n/(\epsilon B) - n$ al problema simplificado
- Sea $n \in \mathbb{N}$, $p_1, \ldots p_n \in \mathbb{R}^+$, $C \in \mathbb{R}^+$ como en la entrada original y $\hat{b}_1, \ldots \hat{b}_n \in \mathbb{N}$ los beneficios (naturales) definidos como sigue:

$$\hat{b}_i = \lfloor b_i/R \rfloor = \lfloor b_i 2n/(\epsilon B) \rfloor$$

Solución ϵ-aproximada para cualquier $\epsilon < 1$

$\text{AproxMochila}(n, p_1, \ldots, p_n, b_1, \ldots, b_n, C, \epsilon)$

$B = \text{máx}(b_1, \ldots, b_n)$

$\hat{b}_i = \lfloor b_i 2n/(\epsilon B) \rfloor$

$(x_1, \ldots, x_n) = Dinam2(n, p_1, \ldots, p_n, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n, C)$

Resultado $x_1, \ldots, x_n$

Análisis del algoritmo

1. Recordad que
   - Un beneficio $\hat{x}$ al problema simplificado supone un beneficio de al menos $R\hat{x} = \hat{x}\epsilon B/(2n)$ al problema original
   - Y un beneficio x al problema original supone un beneficio de al menos $x/R - n = x2n/(\epsilon B) - n$ al problema simplificado
2. Si $\hat{S}$ es el conjunto óptimo para $(n, p_1, \ldots, p_n, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n, C)$,
$$\sum_{i \in \hat{S}} b_i \geq \epsilon B/(2n) \sum_{i \in \hat{S}} \hat{b}_i$$
3. Si S es el conjunto óptimo para $(n, p_1, \ldots, p_n, b_1, \ldots, b_n, C)$,
$$\sum_{i \in S} \hat{b}_i \geq \left(\sum_{i \in S} b_i \right) 2n/(\epsilon B) - n$$
4. Como $\hat{S}$ es óptimo para $(n, p_1, \ldots, p_n, \hat{b}_1, \ldots, \hat{b}_n, C)$,
$$\sum_{i \in \hat{S}} \hat{b}_i \geq \sum_{i \in S} \hat{b}_i$$

Análisis del algoritmo

4. Uniendo las tres anteriores,

$$\sum_{i\in\hat{S}} b_i \geq \epsilon B/(2n) \sum_{i\in\hat{S}} \hat{b}_i$$

$$\sum_{i\in\hat{S}} \hat{b}_i \geq \sum_{i\in S} \hat{b}_i$$

$$\sum_{i\in S} \hat{b}_i \geq \left(\sum_{i\in S} b_i\right) 2n/(\epsilon B) - n$$

5. tenemos

$$\frac{\sum_{i\in S} b_i}{\sum_{i\in\hat{S}} b_i} \leq \frac{\sum_{i\in S} b_i}{\sum_{i\in S} b_i - \epsilon B/2} =$$

$$= 1 + \frac{\epsilon B/2}{\sum_{i\in S} b_i - \epsilon B/2} \leq 1 + \frac{\epsilon/2}{1-\epsilon/2} \leq 1+\epsilon$$

Porque $\sum_{i\in S} b_i \geq B$ y $\epsilon < 1$

Aproximación de mochila

- Como hemos dicho antes, en tiempo $O(n^3/\epsilon)$ resolvemos el problema simplificado, luego polinómico en n y en $1/\epsilon$ Es lo que llamamos un **FPTAS**
- En general podemos utilizar la programación dinámica como aproximación:
  1. Reescalamos los valores para que la programación dinámica sea más rápida
  2. Comparamos la solución obtenida con la solución óptima

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. Set cover
7. Mochila
8. **Cobertura de Vértices con Pesos**
9. Otra vez TSP
10. Resumen

Cobertura de Vértices con Pesos

- Vamos a ver un algoritmo de aproximación basado en **programación lineal**
- Se trata de una 2-aproximación eficiente

Cobertura de Vértices con Pesos

Problema: wVC
Entrada: Un grafo G (con vértices V), un peso positivo $w(v)$ para cada vértice $v \in V$.
Salida: Encontrar un conjunto U de vértices de G con el menor peso posible

$$\sum_{v \in U} w(v)$$

y tal que cada arista (i, j) de G cumple que $i \in U$ ó $j \in U$

- Es una generalización de VC (minimizar el número de vértices) ya que VC es el caso $w(v) = 1$ para todo v
- Al tratarse de una generalización de VC no se puede aproximar con ratio 1,1666 (si P$\neq$ NP)

Programa lineal para wVC

- No podemos aplicar el algoritmo aproximado para VC (no aproxima bien)
- Podemos representar el problema de optimización como un problema de programación lineal:
  - Asociamos a cada vértice v una variable $x(v)$ que puede valer 0 ó 1
  - Añadimos v al cubrimiento si y sólo si $x(v) = 1$
  - Para cada arista (u, v) la condición de que u ó v deben estar en el cubrimiento se escribe
    $$x(u) + x(v) \geq 1$$
  - Así tenemos el siguiente **programa entero 0-1** para encontrar el mínimo cubrimiento:

$$\begin{array}{rll} \textbf{Función Objetivo} & \text{mín} \quad \sum_{v \in V} w(v)x(v) & \\ \textbf{Restricciones} & x(u) + x(v) \geq 1 & \text{para cada arista } (u, v) \\ & x(v) \in \{0, 1\} & \text{para cada vértice } v \end{array}$$

Programa lineal relajado para wVC

- Si quitamos la restricción $x(v) \in \{0,1\}$ y la sustituimos por $0 \leq x(v) \leq 1$ obtenemos el siguiente **programa lineal (la relajación)**:

Función Objetivo	$\min \sum_{v \in V} w(v)x(v)$	
Restricciones	$x(u) + x(v) \geq 1$	para cada arista (u, v)
	$0 \leq x(v) \leq 1$	para cada vértice v

- El problema original es un caso particular de la relajación, luego el óptimo de la relajación es una cota inferior del óptimo del original
- ¿Cómo podemos usar la relajación para aproximar el original?

Algoritmo aproximado para wVC

$\textsc{Aprox-Min-Weight-VC}(G, w)$

$U = \emptyset$
Calcula $\hat{x}$, una solución óptima para el programa lineal relajación
for $v \in V$
  if $\hat{x}(v) \geq 1/2$
  Añadir v a U
Resultado U

- La solución obtenida es un "redondeo" de la solución del programa lineal relajado
- ¿Cómo de buena es la aproximación?

2-aproximación para wVC

- Sea $c(G,w)$ una solución óptima para wVC
- Sea $\hat{x}$ una solución óptima para el programa lineal relajación
- Sea $z = \sum_{v \in V} w(v)\hat{x}(v)$
- Como un cubrimiento es una solución del programa lineal relajación,

$$z \leq c(G,w)$$

2-aproximación para wVC

- Redondeando para encontrar el conjunto U (cogiendo los v con $\hat{x}(v) \geq 1/2$) veamos que obtenemos un cubrimiento válido con peso $w(U) \leq 2z$:
  - U es un cubrimiento válido porque para cada arista (u, v), $\hat{x}(u) + \hat{x}(v) \geq 1$, luego al menos uno de entre $\hat{x}(u)$ y $\hat{x}(v)$ es al menos $1/2$ y es incluido en U

2-aproximación para wVC

- Tenemos

$$
\begin{aligned}
z &= \sum_{v\in V} w(v)\hat{x}(v) \\
&\geq \sum_{v\in V,\ \hat{x}(v)\geq 1/2} w(v)\hat{x}(v) \\
&\geq \sum_{v\in V,\ \hat{x}(v)\geq 1/2} w(v)1/2 \\
&= \sum_{v\in U} w(v)1/2 \\
&= 1/2\cdot w(U) = 1/2\cdot \hat{c}(G,w)
\end{aligned}
$$

- Luego $\hat{c}(G,w) \leq 2z \leq 2c(G,w)$
- Y Aprox-Min-Weight-VC es una 2-aproximación para wVC

Complejidad de la aproximación

- Existen algoritmos en tiempo polinómico para programación lineal (algoritmo de Karmarkar)
- También visteis el Simplex que es exponencial pero en muchos casos es rápido
- Luego podemos 2-aproximar wVC **en tiempo polinómico**

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. Set cover
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. **Otra vez TSP**
10. Resumen

TSP

Problema: TSP minimización
Entrada: n el número de ciudades y M la matriz de distancias $n \times n$.
Salida: Encontrar un recorrido por las n ciudades, sin repeticiones y volviendo al punto de partida con distancia total la mínima posible

- El mayor problema resuelto óptimamente hasta 2006 es una entrada de 85.900 ciudades
- Usando heurísticas, varias entradas de millones de ciudades se han resuelto dentro del 1 % de la solución óptima
- Las distancias no tienen que satisfacer la desigualdad triangular para todas las ciudades
  - Piensa en la distancia definida como tiempo de vuelo entre las dos ciudades
  - O simplemente en el camino que selecciona un GPS con la opción "Ruta más rápida"
  - O el precio de volar de una ciudad a otra ...

TSP no se puede aproximar

- Hemos visto problemas para los que conseguíamos una aproximación de ratio constante
- Otros para los que conseguíamos aproximación todo lo pequeña que queramos
- Para TSP el resultado es negativo, no se puede aproximar para ninguna constante **(Si P$\neq$ NP)**

TSP no se puede aproximar

- Recordemos que *Ciclo Hamiltoniano* es NP-difícil
  Problema: Ciclo Hamiltoniano
  Entrada: Un grafo G con n vértices.
  Salida: ¿Existe un ciclo hamiltoniano en G, es decir, un camino que visita una vez cada vértice y vuelve al vértice inicial?
- Vamos a demostrar que **si podemos C-aproximar** *TSP minimización* **para alguna constante C entonces podemos resolver** *Ciclo Hamiltoniano* **eficientemente** (en tiempo polinómico)
- Luego **si P$\neq$ NP entonces** *Ciclo Hamiltoniano* no se puede resolver eficientemente y por tanto **no podemos aproximar** *TSP minimización* **con ningún ratio constante**

si podemos C-aproximar TSP entonces podemos resolver HAM

- Supongamos que tenemos un algoritmo eficiente *AproxTSP* que C-aproxima *TSP minimización*
- Dada una entrada G de *Ciclo Hamiltoniano* la convertimos en una entrada de TSP, con distancia 1 cuando había arista en G y distancia $Cn + 1$ cuando no había
- Veremos que a partir de un recorrido C-aproximado podemos saber si existe un ciclo hamiltoniano para el grafo G original

si podemos C-aproximar TSP entonces podemos resolver HAM

CicloHamiltoniano(G)

```
n = número de vértices de G
for i = 1 to n
    for j = 1 to n
        if (i, j) es arista de G
            d(i, j) = 1
        else d(i, j) = Cn + 1
    R = AproxTSP(n, d).
    if sum_{i=1}^{n-1} d(R[i], R[i+1]) <= Cn
        Resultado Cierto
    else Resultado Falso
```

$$\text{if } \sum_{i=1}^{n-1} d(R[i], R[i+1]) \leq Cn$$

Análisis de la corrección del algoritmo

- Si G tiene hamiltoniano entonces el recorrido óptimo de (n, d) medirá n y *AproxTSP* devuelve un recorrido de distancia total $\leq Cn$ y el algoritmo devuelve Cierto
- Si G no tiene ciclo hamiltoniano entonces cualquier recorrido sin repeticiones de todas las ciudades de (n, d) medirá al menos $(n-1)+(Cn+1)=(C+1)n$ y el algoritmo devuelve Falso

TSP

- Hemos reducido *Ciclo Hamiltoniano* a C-aproximar TSP
- Luego hemos visto que para cada C, C-**aproximar TSP es NP-difícil**
- Es lo mismo que pasaba para los problemas:
  - 1,1666-aproximar VC es NP-difícil
  - 1,013-aproximar *TSP métrico* es NP-difícil
  - para cada C, C-aproximar *Set Cover* es NP-difícil

Contenido de este tema

1. Introducción
2. Problemas de optimización
3. Diferentes tipos de aproximación
4. Cobertura de Vértices
5. TSP métrico
6. Set cover
7. Mochila
8. Cobertura de Vértices con Pesos
9. Otra vez TSP
10. **Resumen**

Resumen

- Hemos visto algoritmos de aproximación con ratio
  - logarítmico
  - constante
  - cualquier constante
- Estos son los problemas concretos:
  - log-aproximación de *Set Cover*
  - 2-aproximación de VC
  - 2-aproximación de wVC
  - 2-aproximación de *TSP métrico* (también existe 1,5-aproximación)
  - C-aproximación de *Mochila* para cualquier C
- Resultados negativos: si P$\neq$NP entonces ...
  - No se puede 1,013-aproximar *TSP métrico*
  - No se puede 1,1666-aproximar VC
  - No se puede 1,1666-aproximar wVC
  - No se puede C-aproximar *Set Cover* para ninguna C
  - No se puede C-aproximar *TSP* para ninguna C

Resumen

- Hemos usado como técnicas
  - algoritmos voraces
  - programación dinámica
  - programación lineal
- Estos son los problemas concretos:
  - VC aproximación voraz
  - *Set Cover* aproximación voraz
  - *Mochila* programación dinámica
  - wVC programación lineal
  - TSP métrico spanning trees y recorridos eulerianos (perfect matching)