Ejercicios Tema 1

Algoritmia para problemas difíciles

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas
Escuela de Ingeniería y Arquitectura – Universidad de Zaragoza

1 de octubre de 2013

Ejercicios sobre NP-difíciles

Ejercicio 1 Supongamos que se nos da un programa que puede resolver el problema decisional *TSP* (transparencia 39) en, por ejemplo, tiempo lineal. Se pide un algoritmo eficiente para encontrar el recorrido óptimo de TSP con un número polinómico de llamadas a dicho programa.

Ejercicio 2 Diseñar e implementar un algoritmo de backtracking para probar si un circuito CNF es satisfacible. ¿Qué criterios se pueden utilizar para podar esta búsqueda?

Ejercicio 3 Un ejemplo del problema de *Cobertura por Conjuntos* se compone de un conjunto X de n elementos, una familia F de subconjuntos de X y un entero k. La pregunta es, ¿existen k subconjuntos de los de F cuya unión es X?
Por ejemplo, si $X = \{1, 2, 3, 4\}$ y $F = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}, \{2, 4\}\}$, no existe una solución para $k = 2$, pero sí existe para $k = 3$ (por ejemplo, $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4\}$). Demostrar que *Cobertura por Conjuntos* es intratable con una reducción desde *Cobertura de Vértices*.

Ejercicio 4 El problema *Coleccionista de cromos de béisbol* es el siguiente: dados los sobres $P_1, \ldots, P_m$, cada uno de los cuales contiene un subconjunto de los cromos de este año, ¿es posible conseguir todos los cromos de este año comprando k sobres?
Por ejemplo, si los jugadores son $Aaron, Mays, Ruth, Skiena$ y los sobres son

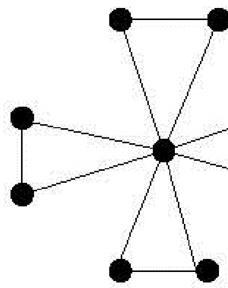
$$\{Aaron, Mays\}, \{Mays, Ruth\}, \{Skiena\}, \{Mays, Skiena\},$$

no existe una solución para $k = 2$, pero sí existe para $k = 3$, por ejemplo

$$\{Aaron, Mays\}, \{Mays, Ruth\}, \{Skiena\}.$$

Demostrar que el problema *Coleccionista de cromos de béisbol* es intratable con una reducción desde *Cobertura de Vértices*.

Ejercicio 5 El problema *Árbol de recubrimiento de bajo grado* es el siguiente: dado un grafo G y un entero k, ¿contiene G un árbol de recubrimiento tal que todos los vértices del árbol tienen grado como mucho k (obviamente, sólo las aristas en el árbol cuentan para el grado)?
(Para la definición de árbol de recubrimiento o *spanning tree* se pueden ver el libro de Skiena o los apuntes de AB (tema 2, transparencia 40)).
Por ejemplo, en el siguiente grafo, no hay ningún de recubrimiento de tal manera que todos los vértices tienen un grado menor que tres.



1. Demostrar que problema *Árbol de recubrimiento de bajo grado* es intratable con una reducción desde *camino Hamiltoniano* (*camino Hamiltoniano* es un problema similar a *ciclo Hamiltoniano* pero en el que se busca un camino sin repeticiones y por todos los vértices que no tiene que ser cerrado).
2. Ahora considerar el problema *Árbol de recubrimiento de alto grado*, que es como sigue. Dado un grafo G y un entero k, ¿contiene G un árbol de recubrimiento tal que el mayor grado de un vértice es por lo menos k? En el ejemplo anterior, existe un árbol de recubrimiento con grado más alto 8. Dar un algoritmo eficiente para resolver el problema *Árbol de recubrimiento de alto grado*, y un análisis de su complejidad en tiempo.

Ejercicio 6 Demostrar que el siguiente problema es intratable:
Problema: Subgrafo denso
Entrada: Un grafo G y enteros k, y.
Salida: ¿Contiene G un subgrafo con exactamente k vértices y al menos y aristas?

Ejercicio 7 Demostrar que el siguiente problema es intratable:
Problema: Clique, no-clique
Entrada: Un grafo G y un entero k.
Salida: ¿Contiene G un clique de k vértices y un conjunto independiente de k vértices?

Ejercicio 8 Un *ciclo Euleriano* es un recorrido que pasa por cada arista de un grafo exactamente una vez. Un *subgrafo Euleriano* es un conjunto de vértices y aristas de un grafo que tiene un ciclo Euleriano. Demostrar que la problema de encontrar el número de aristas en el mayor subgrafo Euleriano es intratable. (Pista: *ciclo Hamiltoniano* es intratable aunque añadamos la restricción de que cada vértice del grafo está en exactamente 3 aristas.)

Ejercicio 9 Dar un algoritmo en tiempo polinómico para resolver 2-SAT (transparencia 62).

Ejercicio 10 Demostrar que los siguientes problemas están en NP:

- ¿El grafo G tiene un camino simple (es decir, sin repetir vértices) de longitud k?
- ¿Es n un entero compuesto (es decir, no es primo)?
- ¿Tiene un grafo G una cobertura de vértices de tamaño k?

En caso de entregar alguno de estos ejercicios, la fecha límite es el lunes 28 de octubre.
Antes de realizar cualquiera de estos ejercicios el alumno debe enviar un correo a `elvira@unizar.es` indicando qué ejercicio desea realizar.
Cualquier fuente utilizada en la resolución de estos ejercicios debe ser indicada claramente en la solución.