Lección 3: Descriptores de forma

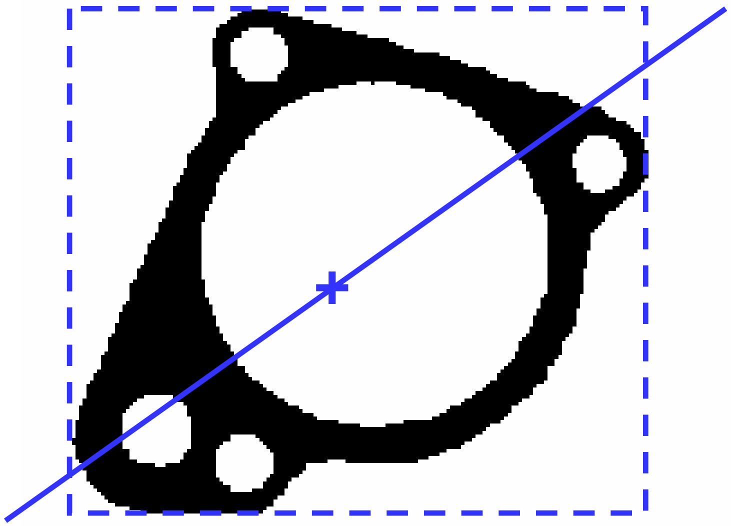
1. Dependientes de la posición
   – Rectángulo envolvente
   – Centroide
   – Orientación

2. Independientes de la posición
   – Momentos de imagen
   – Perímetro
   – Elongación
   – No. de Euler

Introducción: descriptores

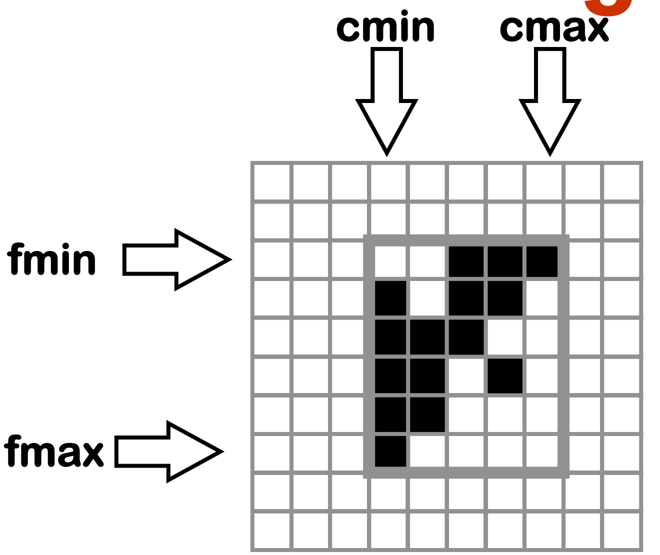
- Propiedades que permiten **iden-tificar** y **localizar** objetos:
  - Dependientes de la posición
    - » Rectángulo envolvente
    - » Centroide
    - » Orientación
  - Independientes de la posición
    - » Momentos de imagen
    - » Perímetro
    - » Elongación
    - » Agujeros (No. de Euler)
- La identificación de objetos ba-sada en descriptores es posible cuando:
  - No. limitado y conocido
  - Posiciones estables
  - Aislados
  - Completamente visibles

- Objetos caracterizados por su silueta:

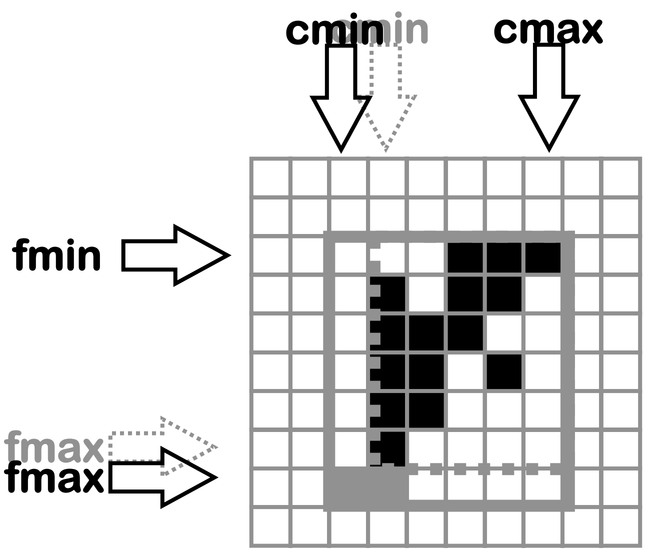


- Muchos descriptores pueden cal-cularse durante el análisis de co-nectividad

Rectángulo Envolvente



Sensible al ruido



- Es sencillo de calcular durante el análisis de conectividad:

```
crear_blob(s):
     fmin = fmax = FILA(s)
     cmin = COLUMNA(s)
     cmax = FINAL(s)

anadir_segmento_a_blob(b,s):
     si fmin > FILA(s)
        fmin = FILA(s)
     fsi
     ....

fusionar_blobs(b1, b2):
     fmin = min(fmin1, fmin2)
     fmax = max(fmax1, fmax2)
     cmin = min(cmin1, cmin2)
     cmax = max(cmax1, cmax2)
```

- Invariante a:
  - ¿traslación?
  - ¿rotación?
  - ¿escala?

Momentos de imagen

- **Definición:** momentos de una función continua:

$$\mathtt{m}_p = \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x)dx$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots$$

- ***P(x)***, valor esperado (**media**):

$$\mathtt{m}_1 = \int_{-\infty}^{\infty} xP(x)dx = \mu$$

$$\Rightarrow \mathtt{m}_0?$$

- Momentos centrales:

$$\mathtt{m}'_p = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^p f(x)dx$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots$$

- ***P(x)***, **varianza**:

$$\mathtt{m}'_2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(x)dx = \sigma^2$$

$$\Rightarrow \mathtt{m}'_3? \quad \mathtt{m}'_4?$$

- En R^2:

$$\mathtt{m}_{p,q} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^p y^q f(x,y)dxdy$$

$$p, q = 0, 1, 2, \ldots$$

- **Teorema de la unicidad:** la secuencia { $\mathtt{m}_{p,q}$ } está unívocamente determinada por ***f(x,y)***.

{ $\mathtt{m}_{p,q}$ } caracterizan de forma única a una función

Momentos de imagen

- Para **imagenes binarias digitales**, son sumatorios de productos de potencias de las coordenadas de los pixels:

$$\mathtt{m}_{p,q} \simeq \sum i^p j^q$$

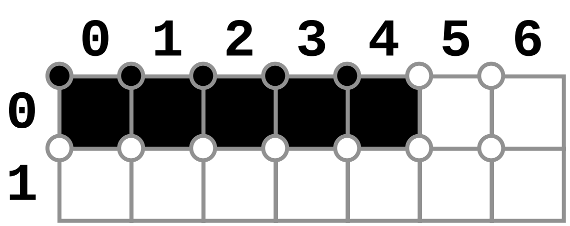
De orden 0: $\sum 1$ ⇦ **No. de pixels**

1: $\sum i \quad \sum j$

2:

Caracterizan de forma única a un objeto.

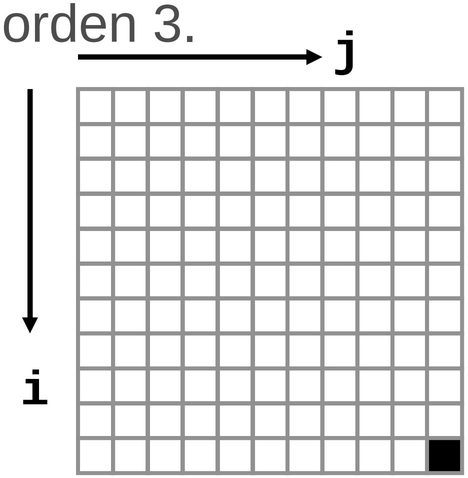
- Convención en la digitalización:



- Teniendo en cuenta la calibración: si S_x (S_y) es la distancia que debe moverse un punto en la escena, en la dirección ***x(y)*** para moverse un pixel en la imagen:

$$\mathtt{Area} = S_x S_y \sum 1$$

- Por razones de precisión, se utilizan los momentos hasta de orden 3.



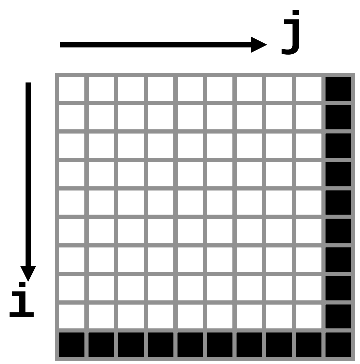
Utilizar coma flotante

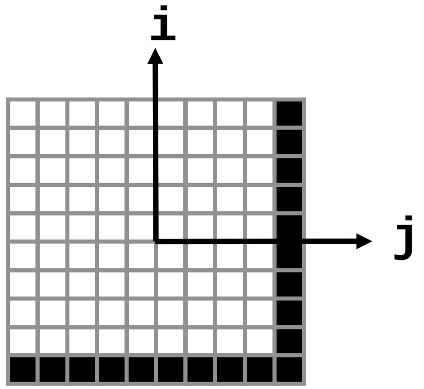
⇦ **$i^p j^q$ grande**

- ¿invariantes a traslación? ¿a rotación? ¿a cambio de escala?

Momentos de imagen

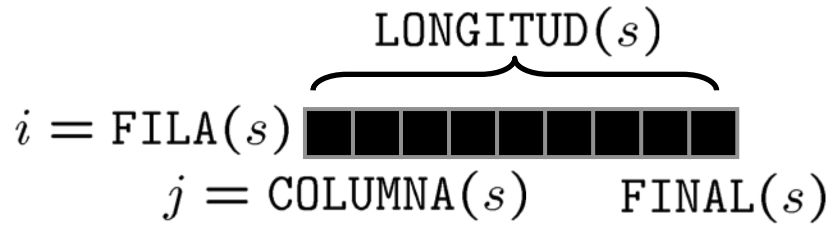
- También por razones de precisión, se puede colocar el origen del sistema de referencia en el centro de la imagen.





Valores mas pequeños, positivos y negativos.

- Pueden calcularse por segmentos durante la conectividad:



$$\mathrm{m}_{0,0,s} =$$
$$\mathrm{m}_{1,0,s} =$$
$$\mathrm{m}_{2,0,s} =$$
$$\ldots$$

- Cálculo eficiente:

```
#define M max(R,C)
long x2[M], x3[M];

void precalcular_potencias()
{
  long i;

  for (i = 0; i < M; i++)
    x3[i] = i * (x2[i] = i*i);
}
```

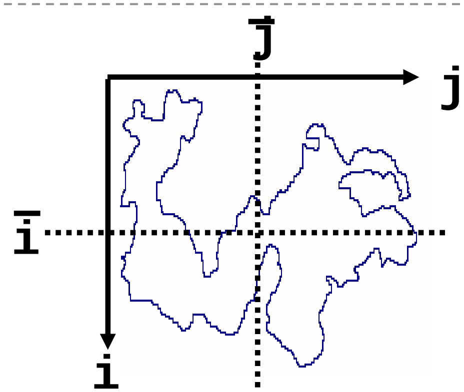
Centroide

- Objetos planos, densidad uniforme del material:

Promedios de *i* y *j*:

$$\bar{i} = \frac{\sum i}{\sum 1} =$$

$$\bar{j} = \frac{\sum j}{\sum 1} =$$



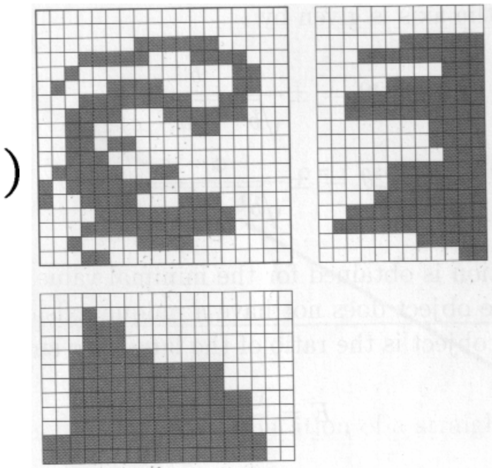
Utilizar coma flotante

- Puede no ser interior al objeto

- Puede obtenerse de las proyecciones

$$\mathrm{H}(i) = \sum_{j=0}^{C-1} \mathrm{B}(i,j)$$

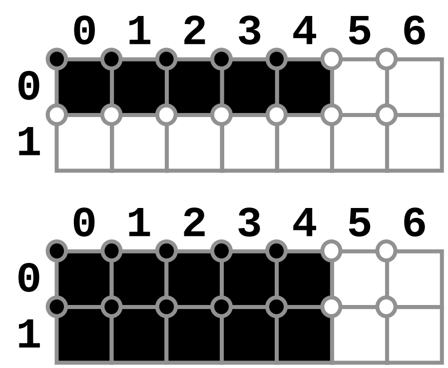
$$\bar{i} = \frac{\sum i \cdot \mathrm{H}(i)}{\sum \mathrm{H}(i)}$$



#pixels fila `i` `H(i)`

#pixels columna `j` `V(j)`

- Efecto de la digitalización:



$$\sum 1 = ?$$

$$\sum i = ?$$

$$\sum j = ?$$

$$\bar{i} = ?$$

$$\bar{j} = ?$$

Momentos centrales

- **Momentos centrales:** Calculados con respecto al centroide:

$$\mu_{p,q} = \sum (i - \bar{i})^p (j - \bar{j})^q$$

$$\begin{aligned}
\mu_{0,0} &= \mathrm{m}_{0,0} \\
\mu_{1,0} &= \\
\mu_{2,0} &= \\
\mu_{1,1} &= \\
\mu_{0,2} &= \\
\ldots
\end{aligned}$$

- Son invariantes a traslaciones:

$$i' = i + a$$

$$\begin{aligned}
\overline{i'} &= \frac{\sum i'}{\sum 1} \\
&= \\
&= \\
\overline{j'} &= \ldots
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu'_{p,q} &= \sum (i' - \overline{i'})^p (j' - \overline{j'})^q \\
\ldots \\
&= \sum (i - \bar{i})^p (j - \bar{j})^q \\
&= \mu_{p,q}
\end{aligned}$$

Momentos normalizados

- **Momentos normalizados** (ajuste de escala):

$$
\begin{aligned}
\eta_{p,q} &= \frac{\mu_{p,q}}{\mu_{0,0}^{\gamma}} \\
\gamma &= \frac{p+q}{2} + 1
\end{aligned}
$$

- p.e., el área:

$$
\begin{aligned}
\eta_{0,0} &= \frac{\mu_{0,0}}{\mu_{0,0}^{1}} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- Invariantes a cambios de escala (no se distinguen tamaños dife- rentes):

$$
\begin{aligned}
i' &= \alpha i \\
\overline{i'} &= \frac{\sum i'}{\sum 1} \\
&= \frac{\alpha \sum i}{\sum 1} \\
&= \alpha \overline{i} \\
\overline{j'} &= \dots
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{\mu'}_{p,q} &= \frac{\sum (i' - \overline{i'})^p (j' - \overline{j'})^q}{\mu_{0,0}^{\gamma}} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Momentos invariantes

- **Momentos invariantes a traslaciones y rotaciones:**

$$
\begin{aligned}
\phi_0 &= \mu_{0,0} \\
\phi_1 &= \mu_{2,0} + \mu_{0,2} \\
\phi_2 &= (\mu_{2,0} - \mu_{0,2})^2 + 4\mu_{1,1}^2 \\
\phi_3 &= (\mu_{3,0} - 3\mu_{1,2})^2 + (3\mu_{2,1} - \mu_{0,3})^2 \\
\phi_4 &= (\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 + (\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2 \\
\phi_5 &= (\mu_{3,0} - 3\mu_{1,2})(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})\left[(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 - 3(\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2\right] \\
&+ (3\mu_{2,1} - \mu_{0,3})(\mu_{2,1} + \mu_{0,3})\left[3(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 - (\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2\right] \\
\phi_6 &= (\mu_{2,0} - \mu_{0,2})\left[(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 - (\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2\right] \\
&+ 4\mu_{1,1}(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})(\mu_{2,1} + \mu_{0,3})
\end{aligned}
$$

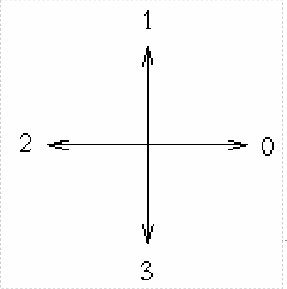
- Para distinguir objetos de su reflejo:

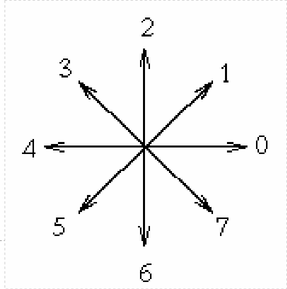
$$
\begin{aligned}
\phi_7 &= (3\mu_{2,1} - \mu_{0,3})(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})\left[(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 - 3(\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2\right] \\
&+ (\mu_{3,0} - 3\mu_{1,2})(\mu_{2,1} + \mu_{0,3})\left[3(\mu_{3,0} + \mu_{1,2})^2 - (\mu_{2,1} + \mu_{0,3})^2\right]
\end{aligned}
$$

- ¿invariantes a cambios de escala? usar η en vez de μ.
- ¿legibilidad? logaritmo del valor absoluto

$$
\psi_i = \log \mid \phi_i \mid, \quad i = 0, 1, \ldots, 7
$$

Perímetro





- Medida relacionada con la **frontera** del blob.

Obtencion de la frontera:

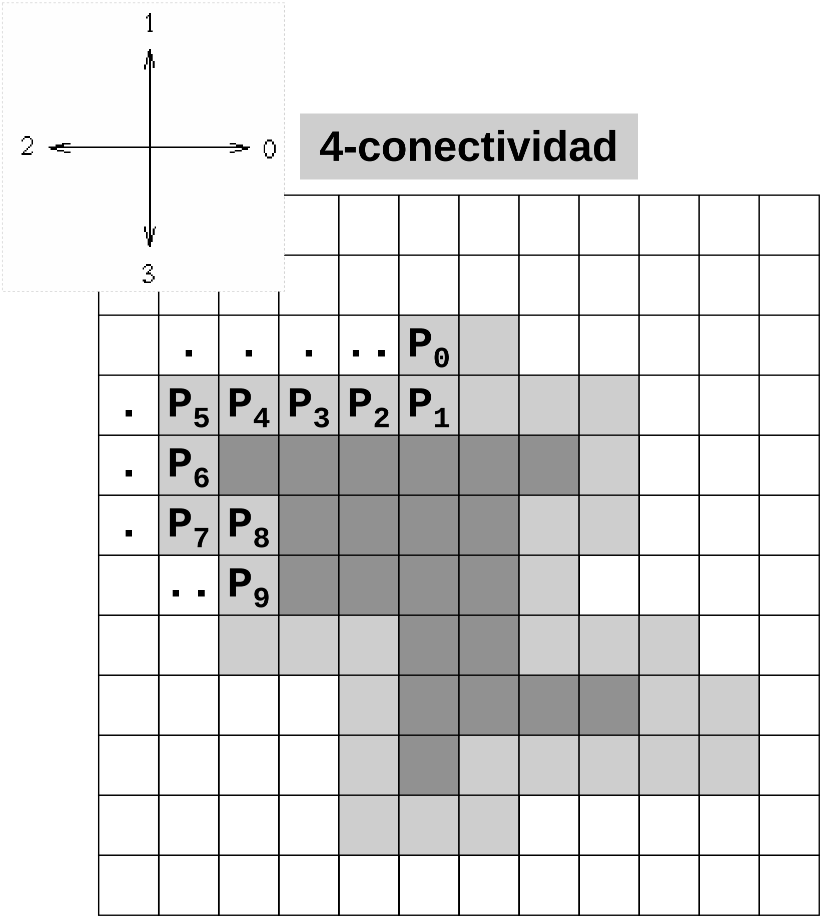
1. Buscar $\mathbf{P_0}$, el pixel de columna menor, dentro de los pixels de menor fila. La variable **dir** almacenará el movimiento previo a lo largo de la frontera del pixel previo al actual:
   dir = 3 (4-conectividad)
   dir = 7 (8-conectividad)

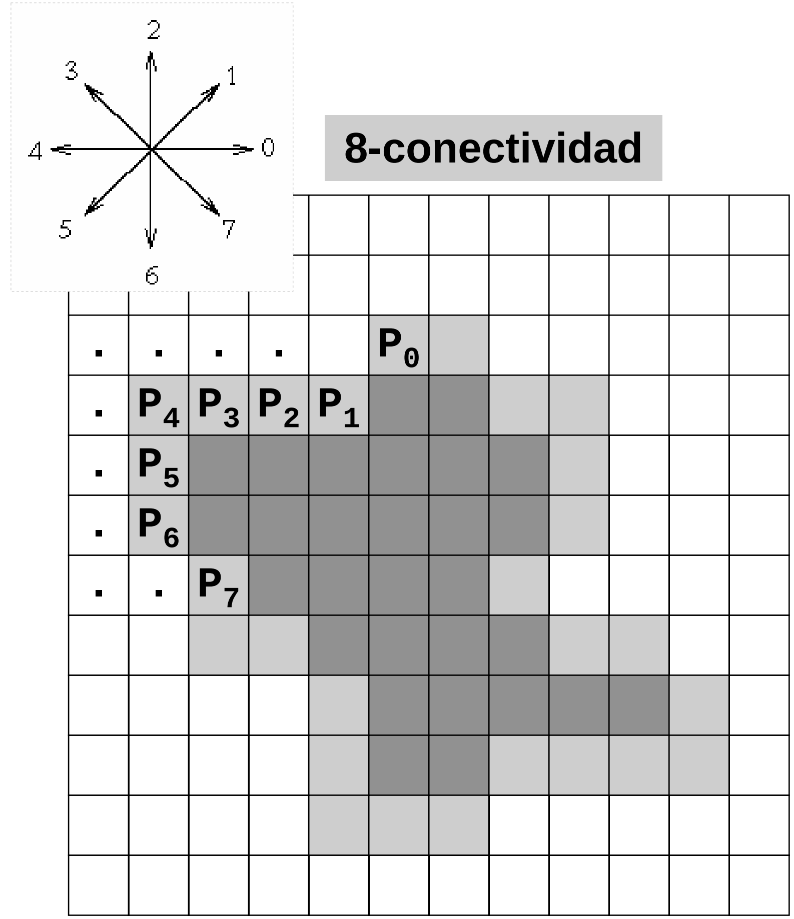
2. Buscar en la vecindad del pixel actual, en dirección contraria a las manecillas del reloj, comenzando por:
   (dir + 3) mod 4 (4-conectividad)
   (dir + 7) mod 8, si **dir** es par (8-conectividad)
   (dir + 6) mod 8, si **dir** es impar (8-conectividad)
   El primer pixel encontrado es el siguiente de la frontera, $\mathbf{P_i}$. Actualizar **dir**

3. Si $(\mathbf{P_i} = \mathbf{P_1})\wedge(\mathbf{P_{i-1}} = \mathbf{P_0})$, fin. Dlc, paso 2.

4. Los pixels $\mathbf{P_0...P_{n-2}}$ constituyen la frontera.

Perímetro

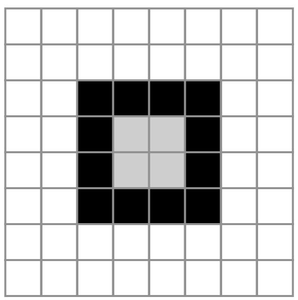




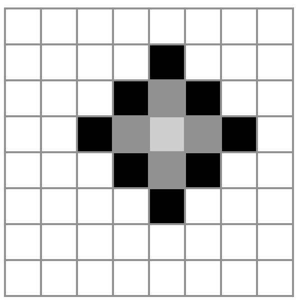
- Válido para regiones de más de un pixel.
- 4-conectividad: lados adyacentes a la frontera
- 8-conectividad: pixels adyadentes a la frontera

Perímetro

- **Cálculo** del perímetro:
  - ¿pixels de la frontera?
  - ¿lados adyacentes con la frontera?
- La digitalización produce una gran variación en el valor del perímetro.

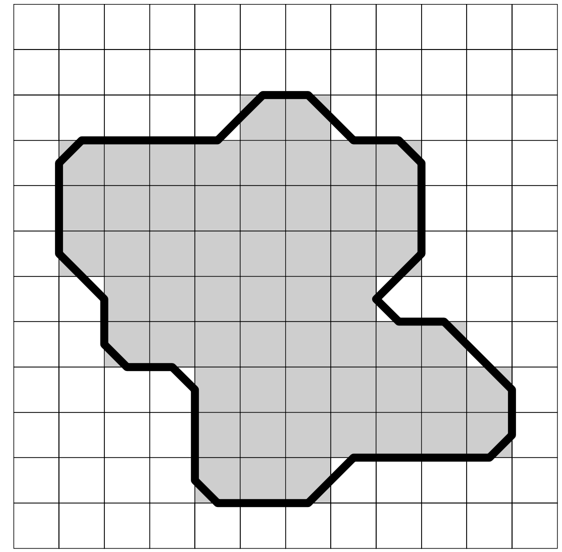


8-p = 12
4-p = 12
l = 16



8-p = 8
4-p = 12
l = 20

- Este efecto se puede mitigar "cortando" las esquinas:



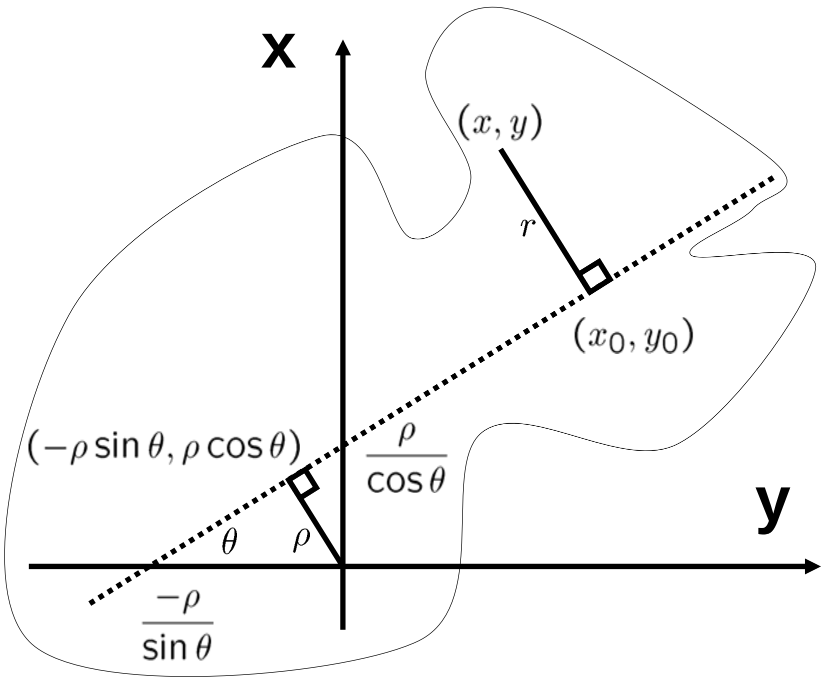
N_h fronteras horizontales
N_v fronteras verticales
N_c esquinas

$$P = S_x N_h + S_y N_v - \frac{S_x + S_y - \sqrt{S_x^2 + S_y^2}}{2} N_c$$

¿qué pasa con los agujeros?

Orientación

- **Eje de mínima inercia:** de mínimo momento de orden 2.
- ¿qué formas tienen infinitos?
- ¿cuáles tienen varios?



- **Obtención**: recta que minimiza las distancias² a los puntos del objeto (regresión total)

- Recta en coordenadas polares:

$$\rho = x\cos\theta + y\sin\theta$$

- Distancia:

$$r^2 = (x\cos\theta + y\sin\theta - \rho)^2$$

- Minimizar:

$$\begin{aligned}\chi^2 &= \sum r_{ij}^2 \\ &= \sum (j\cos\theta + i\sin\theta - \rho)^2\end{aligned}$$

- Derivar con respecto a ρ:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\chi^2}{\partial\rho} &= \sum 2(j\cos\theta + i\sin\theta - \rho)(-1) \\ &= \cos\theta\sum j + \sin\theta\sum i - \rho\sum 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

- El eje pasa por el centroide:

$$\rho = \bar{j}\cos\theta + \bar{i}\sin\theta$$

Orientación

- Minimizar:

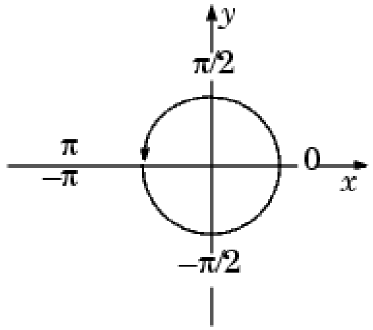
$$\chi^2 = \sum r_{ij}^2 = \sum (j\cos\theta + i\sin\theta - \bar{j}\cos\theta - \bar{i}\sin\theta)^2$$

- ...
- Solución:

$$\theta = \frac{1}{2}\cdot\tan^{-1}\left(\frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0}-\mu_{0,2}}\right)$$

- Hay ambigüedad en el sentido:

rango de $\tan^{-1}$



$$\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$$

~~atan() returns the arc tangent of x in the range -p/2 to p/2.~~

Cuidado con la implementación de esta solucion (ver **`atan2`**).

Elongación, compacticidad

- **Elongación:** medida a partir de la desigualdad:

$$E = \frac{P^2}{A} \geq 4\pi$$

P: perímetro
A: área

- **Compacticidad:**

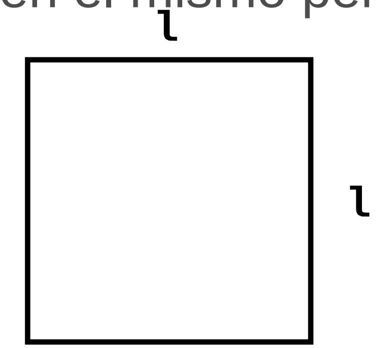
$$C = \frac{4\pi}{E} = \frac{4\pi A}{P^2} \leq 1$$

- El círculo es la figura convexa de mínima elongación (más compacta):

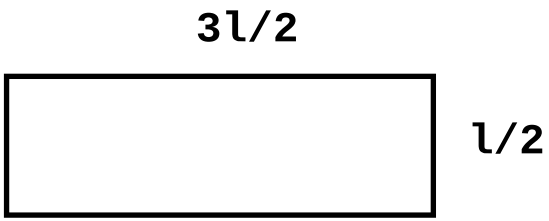
$$E =$$

$$C =$$

- Una región menos elongada (más compacta) contiene un área mayor en el mismo perímetro:



$$E = \frac{(4l)^2}{l^2} = 16$$



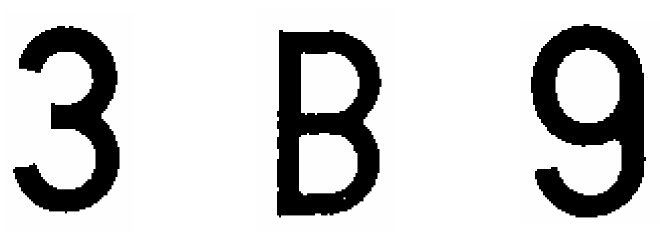
$$E = \frac{(4l)^2}{\frac{3l^2}{4}} = 64/3$$

- Es adimensional

No. de Euler (Género)

- No. de Componentes - No. de agujeros:

$$Eu = C - H$$



$$Eu = ?$$

- Descriptor ***topológico*** invariante.
- Su medición no presenta error aleatorio.

- Sin embargo, es muy sensible al ruido:

$$Eu = -3!$$

- Alternativa: calcular el área de los agujeros