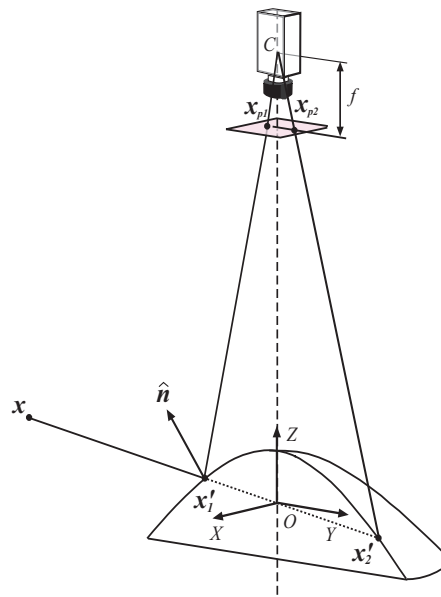


Calibración de Sistemas Catadióptricos de Visión Omnidireccional



Jesús Bermúdez Cameo

Directores: José Jesús Guerrero Campo
Luis Puig Morales

Ingeniería Industrial
Automatización Industrial y Robótica

Departamento de Informática e Ingeniería de Sistemas
Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza

Junio de 2009

Calibración de Sistemas Catadióptricos de Visión Omnidireccional

RESUMEN

En aplicaciones de visión artificial para robótica, el campo de vista (FOV) de la cámara influye considerablemente en tareas de localización, navegación o control visual. Buscando ampliar el campo de vista completo se han desarrollado recientemente las cámaras omnidireccionales que permiten campos de vista de 360° en un eje y de más de 180° en el otro. Este proyecto se centra en los denominados Sistemas Catadióptricos Centrales (SCC), basados en una cámara convencional y un espejo. Estos dispositivos requieren de un modelo analítico más complejo que el modelo de una cámara perspectiva convencional, incorporando la reflexión producida en el espejo. La calibración de estos dispositivos requiere de nuevas metodologías, que difieren considerablemente de las existentes para cámaras convencionales.

En este contexto, el presente PFC enfoca su trabajo en dos actividades;

1. Comparativa entre distintos métodos de calibración interna de sistemas catadióptricos centrales.

En esta actividad se realiza una comparativa entre métodos de calibración para SCC. Dado su carácter experimental estos métodos difieren entre sí en el modelo geométrico, las características utilizadas o el número de vistas requeridas, haciendo difícil a priori su comparación y evaluación. En este PFC se realiza una reconstrucción tridimensional precisa de un patrón utilizando la calibración de cada método para compararlos. Para ello se desarrolla en Matlab un algoritmo de reconstrucción basado en *Structure from Motion* capaz de trabajar con los diversos modelos de proyección que plantean los distintos métodos. La reconstrucción obtenida con cada método se contrasta con una reconstrucción fotogramétrica de alta precisión que se toma como referencia.

2. Autocalibración externa, cálculo de la orientación del sistema catadióptico según direcciones dominantes

Esta actividad se centra en el desarrollo de un algoritmo que calcula la orientación general de la cámara omnidireccional y la utiliza para transformar la imagen en otra equivalente a la que se habría obtenido en posición vertical. Esta condición de posición vertical es una configuración particular del sistema que se utiliza en la actualidad como premisa en tareas de localización y control visual de robots. El algoritmo presentado está restringido a entornos construidos por el hombre y en particular al interior de edificios donde predominan contornos rectos en direcciones vertical y horizontal que sirven al sistema de referencia. Este algoritmo, implementado en Matlab y C para Matlab, basa su funcionamiento en la detección del punto de fuga de las rectas verticales y en su interpretación para estimar la orientación. Las características no lineales propias de los SCC obligan a desarrollar propiedades geométricas y extractores de características específicos para estos sistemas.

Índice general

1. Introducción	7
1.1. Comparativa entre Métodos de Calibración Interna del SCC	9
1.2. Autocalibración Externa; Cálculo de la Orientación del SCC	10
2. Modelo de la Esfera para el SCC	13
2.1. Proyección de una Recta	17
2.2. Mapas de Veronesse	18
3. Calibración Interna del SCC.	
Comparativa de Métodos	19
3.1. Sistema Catadióptrico Utilizado	19
3.1.1. Imágenes Utilizadas	19
3.1.2. Patrón Utilizado	20
3.2. Descripción de los Métodos de Calibración Utilizados	21
3.2.1. Enfoque de Patrón 2D Según el Modelo de la Esfera	21
3.2.2. Enfoque de Proyección de Rectas con el Modelo de la Esfera	23
3.2.3. Enfoque por Transformación Lineal Directa	24
3.2.4. Enfoque de Modelo de Distorsión con Patrón 2D	24
3.3. Métodos de Análisis y Experimentos	26
3.3.1. Reconstrucción Tridimensional del Patrón	26
3.3.2. Error de Reproyección	30
4. Calibración externa:	
Cálculo de la Orientación de la Cámara y Rectificación	33
4.1. Extracción de Cónicas	34
4.1.1. Detección de Puntos Contorno y Clasificación según Conectividad	34
4.1.2. Ajuste de una Cónica en el N-plano a partir de Dos Puntos y la Calibración Interna	35
4.1.3. Ajuste Robusto de Cónicas (RANSAC)	39

4.2.	Cálculo del Punto de Fuga de Rectas Verticales	43
4.2.1.	Sistema de Referencia Utilizado	43
4.2.2.	Intersección de Cónicas	47
4.2.3.	Identificación del Punto de Fuga de Rectas Verticales	52
4.3.	Cálculo de la Orientación de la Cámara	52
4.4.	Rectificación de la Imagen	55
4.5.	Experimentos	56
5.	Conclusiones	59
A.	Geometría de la Hipérbola	61
A.1.	Definición Geométrica de Hipérbola	61
A.2.	Deducción de k	62
A.3.	Ecuación Explícita de la Hipérbola	62
A.4.	Definición de Semi-Latus-Rectum	63
B.	El Sistema Hipercatadióptrico como SCC	67
C.	Modelo de Proyección para un SCC Hiperbólico	71
C.1.	Proyección de un Punto sobre el Hiperboloide de Revolución	72
C.2.	Proyección de \mathbf{x}' en la Cámara Perspectiva	74
D.	Formas Geométricas Independientes de la Calibración	79
D.1.	Simetría de Revolución	79
D.2.	Rectas Verticales	80
E.	Enfoque Esfera-Patron2D	83
E.1.	Modelo de Proyección	83
E.2.	Ecuación Final	84
E.3.	Estimación de la Distancia Focal Generalizada	85
F.	Enfoque Esfera-Rectas	87
F.1.	Calibración del Sistema Catadióptrico Central	88
G.	Enfoque por Transformación Lineal Directa	89
G.1.	Modelo de Cámara	89
G.2.	Matriz de Proyección Genérica	90
G.3.	Calculo de la Matriz de Proyección Genérica	90

G.4. Descomposición de la Matriz de Proyección Genérica	91
H. Enfoque Distorsión-Patrón2D	93
H.1. Modelo de la Cámara	93
H.2. Calibración de la Cámara	94
H.2.1. Resolución de los Parámetros Extrínsecos de la Cámara . . .	95
H.2.2. Resolución de los Parámetros Intrínsecos de la Cámara . . .	95
I. Geometría Projectiva	97
I.1. Coordenadas Homogéneas en el Plano Projectivo P^2	97
I.1.1. Representación de Puntos Bidimensionales	97
I.1.2. Representación de Rectas Bidimensionales	97
I.1.3. Representación de Cónicas Bidimensionales	98
I.1.4. Transformaciones Projectivas	99
I.1.5. La Recta del Infinito	100
I.1.6. Los Puntos Absolutos o Circulares	100
I.1.7. El Punto Polar	100
I.2. Coordenadas Homogéneas en el Espacio Projectivo P^3	101
I.2.1. Representación de Puntos Tridimensionales	101
I.2.2. Representación de Planos Tridimensionales	101
J. Procedimiento para Garantizar la Condición de SCC en un Sistema Hipercatadióptrico	103

Sección 1

Introducción

Las cámaras fotográficas son elementos pasivos que permiten obtener información angular pero no de profundidad. La profundidad se reconstruye mediante la triangulación de los rayos relativos a puntos correspondientes en imágenes que deben haber sido tomadas desde posiciones diferentes. Esta traslación se consigue bien utilizando dos cámaras con un desplazamiento entre sí (visión estereo) o bien desplazando una única cámara.

En los últimos años, el uso de cámaras omnidireccionales se ha consolidado en aplicaciones de robótica. El motivo de ello es que muchos de los problemas de visión artificial aplicada a la robótica se ven fuertemente condicionados por el campo de vista (FOV). Las cámaras convencionales trabajan con campos de vista que oscilan entre los 40 y 60° y el modelo analítico de cámara proyectiva tiene su límite teórico en 180°. Buscando superar esta limitación se han desarrollado recientemente diversos sistemas que permiten abarcar campos de vista de 360°. Estos sistemas suponen una novedad en dos aspectos; el primero es el desarrollo de un dispositivo que permite capturar una imagen de la escena completa, el segundo es la definición de un modelo geométrico y analítico que permite integrar la información de este nuevo sensor en un sistema automático.

Desde el punto de vista constructivo existen diversos tipos de cámaras omnidireccionales.

- Uno de ellos es la cámara rotatoria, que consiste en una cámara convencional con un sistema mecánico que permite el movimiento a lo largo de una trayectoria circular tomando una imagen de toda la escena.
- Otra configuración de cámara omnidireccional consiste en un conjunto de cámaras convencionales situadas con una orientación adecuada para abarcar el mayor campo de vista posible.

- Los sistemas dióptricos, que son cámaras convencionales con lentes de gran angular, como la lente de ojo de pez.
- Otra clase de cámaras omnidireccionales a la que prestaremos especial atención es la que engloba a los sistemas catadióptricos. Este tipo de sistemas combinan cámaras convencionales con espejos.

Desde el punto de visto del modelo geométrico los sistemas catadióptricos han sido estudiados por Baker y Nayar [1] quienes demostraron que los espejos elípticos, parabólicos e hiperbólicos son los únicos que pueden ser combinados con cámaras convencionales constituyendo sistemas catadióptricos centrales (SCC). Esta propiedad relaciona los rayos incidentes en un sistema catadióptrico central de manera unívoca con los puntos de la imagen tomada por el sistema.

Los sistemas catadióptricos más usuales son el hipercatadióptrico, compuesto de un espejo hiperbólico y una cámara perspectiva y el paracatadióptrico formado por un espejo parabólico y una cámara ortográfica. Estos sistemas, construidos bajo las restricciones geométricas correspondientes, se comportan como sistemas catadióptricos centrales ¹.

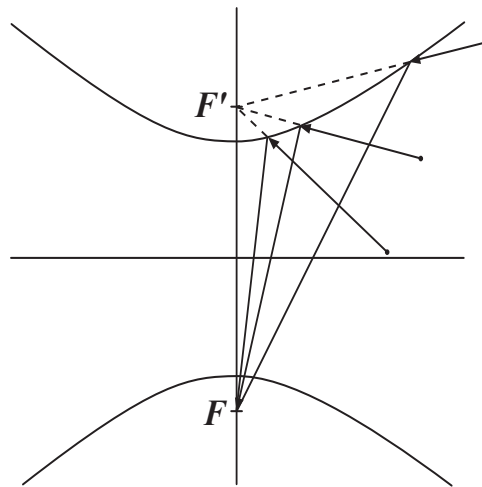


Figura 1.1: Sistemas catadióptricos centrales con espejo hiperbólico. El sistema hipercatadióptico se comporta como central si se sitúa la cámara perspectiva en uno de los focos de la hipérbola generadora F en cuyo caso los rayos proyectados se comportan como si incidiesen en el otro foco F' que es el origen del sistema catadióptico central.

El uso de estos sistemas puede verse en aplicaciones como la localización, realidad virtual, navegación, SLAM, odometría visual, etc. La mayoría de estas ta-

¹Ver el anexo B

reas, especialmente en robótica, necesitan reconstruir información métrica del entorno. En este proyecto se trata la calibración de los sistemas catadióptricos centrales con dos objetivos y enfoques distintos.

El primero aborda la calibración interna del dispositivo necesaria para reconstruir información de la escena. En este enfoque se comparan diversos métodos que se han desarrollado para calibrar estas cámaras. Debido a la reciente aparición y diversidad constructiva de este tipo de cámaras omnidireccionales, no existe siquiera consenso en el modelo geométrico. Ésto hace que la comparación de los resultados no sea trivial e incluso que la calibración utilizada en una aplicación basada en un modelo no sea útil en otra. Esta calibración interna supone un paso de laboratorio previo su utilización y debido a su influencia en el comportamiento posterior del sistema se antepone la precisión a la eficiencia en su desarrollo.

El segundo enfoque plantea la autocalibración externa del sistema catadióptrico que calcule la orientación de la cámara respecto del entorno, como paso previo a aplicaciones de localización y control visual que requieren que la cámara se mantenga vertical. Esta calibración externa esta orientada a ser utilizada durante la ejecución de la aplicación y no previamente con vistas a poder ser desarrollada para un sistema en tiempo real.

1.1. Comparativa entre Métodos de Calibración Interna del SCC

Existen diversos modelos geométricos y analíticos para abordar este tipo de sistemas, Svoboda y Pajdla [2] proponen un modelo diferente para cada espejo. Mas recientemente Geyer y Daniilidis [3] han propuesto el modelo unificado de la esfera, el cual permite tratar con cualquier sistema catadióptrico central. Este modelo ha sido posteriormente desarrollado por Barreto y Araujo [4] llegando a convertirse en el modelo geométrico mas usado en la actualidad. La mayoría de los métodos de calibración para sistemas catadióptricos centrales desarrollados hasta ahora tratan el sistema catadióptrico como un todo. Existen no obstante métodos que separan la calibración de la cámara convencional del cálculo de los parámetros del espejo. Algunos de estos métodos son válidos también para las lentes de ojo de pez.

Entre los métodos de calibración que calibran el sistema catadióptrico completo se referencian aquellos que hacen uso de una o múltiples vistas de un patrón 2D/3D [5, 6, 8], los que utilizan una sola imagen que contiene características inva-

riantes como rectas [7] y los que tienen un enfoque de autocalibración [9]. Algunas aproximaciones al problema calculan separadamente la calibración de la cámara convencional y los parámetros del espejo [2]. Existe una gran cantidad de diferentes métodos de calibración que difieren en aspectos como el modelo geométrico o el patrón de calibración lo que hace compleja su comparación. A la hora de utilizar un método de calibración, aspectos como la facilidad de uso o la disponibilidad del código bajo licencias de código abierto o software libre son fundamentales para el usuario del robot, más interesado en los resultados de reconstrucción 3D o la estimación del movimiento que en complejos modelos de proyección. Para comparar estos métodos se ha realizado una reconstrucción 3D con información métrica. Los métodos comparados son:

1. El método [5] hace uso del modelo de la esfera y requiere varias imágenes de un patrón 2D. La denominación elegida para esta enfoque es Esfera-Patron2D.
2. El método [6] utiliza una secuencia de correspondencias 2D-3D. También usa el modelo de la esfera. Se denomina enfoque DLT.
3. El método [7] utiliza igualmente el modelo de la esfera y basa su calibración en una única imagen omnidireccional que contiene como mínimo la proyección de tres líneas. Se denomina Esfera-Rectas.
4. El método [8] modela la imagen omnidireccional según los modelos de distorsión propuestos para cámaras perspectivas. Esta distorsión es modelada según una serie de Taylor. Este enfoque es denominado como Distorsión-Patrón2D.

1.2. Autocalibración Externa; Cálculo de la Orientación del SCC

Diversos sistemas que utilizan la visión omnidireccional como la localización basada en mapas o el emparejamiento de características basan su funcionamiento en el supuesto de que el conjunto cámara-espejo se encuentra orientado en posición vertical, pero esta configuración no siempre se mantiene cuando la cámara va montada sobre un dispositivo móvil.

El objetivo de esta segunda parte es obtener de forma automática la orientación general a partir de una única imagen tomada sin restricción de verticalidad y utilizarla para transformar la imagen en otra equivalente a la que se habría obtenido en posición vertical. Para ello, se asume su utilización en entornos construidos por

el hombre, donde los contornos rectos son abundantes y van dirigidos sobre direcciones dominantes. Se parte asimismo del supuesto de que se conoce previamente la calibración interna del sistema.

El método utilizado consiste en calcular los puntos de fuga de las proyecciones de los contornos rectos que, en las imágenes omnidireccionales son cónicas.

Como las rectas verticales y horizontales son predominantes, la mayoría de las cónicas fugan a unos pocos puntos que se intentarán identificar y que son función de la orientación.

Sección 2

Modelo de la Esfera para el SCC

El modelo de la esfera es un modelo geométrico abstracto que unifica la geometría de proyección característica de los sistemas catadióptricos y que encapsula en los parámetros ξ y ψ las características geométricas del espejo. La equivalencia geométrica entre el modelo de la esfera y un modelo basado en el caso particular del sistema hipercatadióptrico se puede consultar en el anexo C.

El sistema de referencia de este modelo es el origen del sistema catadióptrico central O , cuya posición en la realidad varía dependiendo del tipo de sistema utilizado. En el caso de un sistema hipercatadióptrico, se halla en uno de los focos de la hipérbola generatriz, en el caso de el sistema paracatadióptrico corresponde al foco de la parábola y en el caso de sistema perspectivo coincide con el centro óptico de la cámara.

La proyección de un punto de la escena se puede describir en varios pasos.

Sea S la esfera centrada en el origen del sistema catadióptrico central O y de radio unidad se calcula la proyección del punto X sobre la esfera como la intersección de la recta r definida por los puntos X y O con la esfera.

Estos dos puntos \mathbf{r}^+ y \mathbf{r}^- son proyectados a través del centro óptico virtual $C_p = (0 \ 0 \ -\xi)^T$ sobre un plano de proyección virtual según el modelo de cámara perspectiva. El resultado final de esta proyección son los puntos $\hat{\mathbf{x}}^\pm$ uno de los cuales es físicamente coherente.

Este modelo cubre cualquier cámara catadióptrica central, codificando el tipo del espejo y su geometría en el parámetro ξ .

$\xi = 0$ para cámara perspectiva, $\xi = 1$ para catadióptrica, $0 < \xi < 1$ para hipercatadióptrica.

	ξ	ψ
Parábola	1	$1 + 2p$
Hipérbola	$\frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}}$	$\frac{d+2p}{\sqrt{d^2+4p^2}}$
Elipse	$\frac{d}{\sqrt{d^2+4p^2}}$	$\frac{d-2p}{\sqrt{d^2+4p^2}}$
Planar	0	1
d : distancia entre focos $4p$:latus rectum		

Tabla 2.1: Parámetros del modelo unificado

El modelo de cámara perspectiva virtual viene descrito por la matriz de proyección $P_p \sim K_c R_c (I - C_p)$, donde K_c es la matriz de calibración. La rotación R_p denota la rotación de la cámara perspectiva que mira al espejo. Dado que tanto los parámetros intrínsecos de la cámara perspectiva como los extrínsecos son parámetros intrínsecos del sistema catadióptrico central, se utiliza una matriz genérica de transformación H_c .

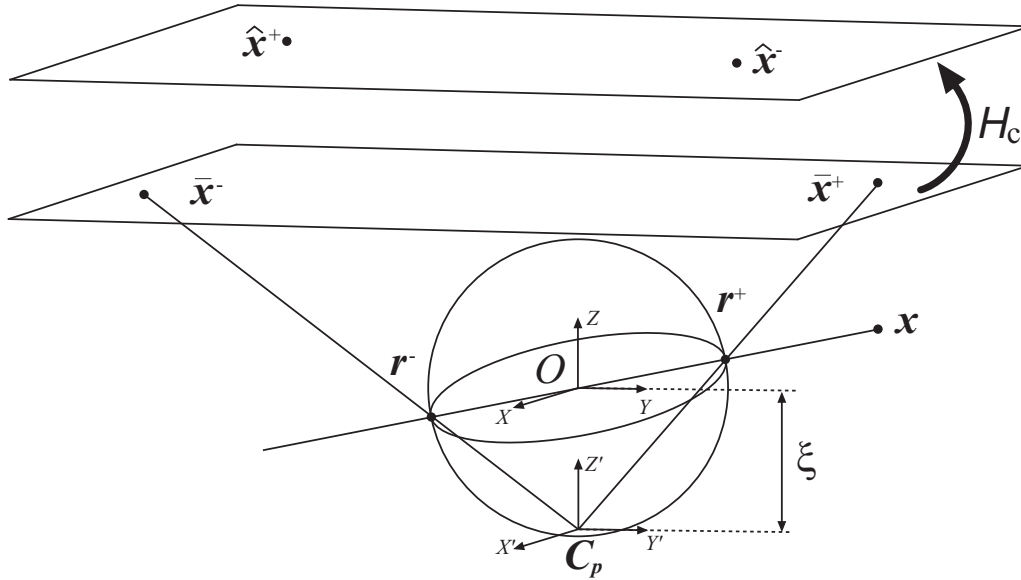
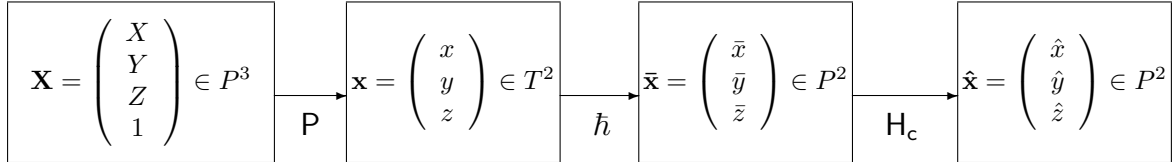


Figura 2.1: Modelo de la esfera para sistemas catadióptricos

Nótese que la distancia focal de la cámara virtual del modelo de la esfera es un valor determinado por la distancia focal de la cámara real y por los parámetros

geométricos del espejo. Los parámetros intrínsecos de la cámara catadioptrica son ξ y H_c .

Si sólo se tiene en cuenta de entre los puntos $\hat{\mathbf{x}}^\pm$ el que es físicamente coherente el proceso se puede dividir en tres pasos.



Un primer paso consistente en representar el punto de la escena definido en el espacio proyectivo P^3 por sus coordenadas homogéneas en el sistema de referencia del sistema catadioptrico y proyectar el punto sobre un plano a una distancia unidad como un paso intermedio al espacio proyectivo P^2

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad (2.1)$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}(\mathbf{I} - \mathbf{C}_O) \quad (2.2)$$

siendo \mathbf{C}_O las coordenadas del origen del sistema catadioptrico central O en un sistema de referencia global dado y \mathbf{R} la orientación del SCC respecto de la referencia global.

Un segundo paso definido por la función no lineal h que encapsula la proyección sobre la esfera y su proyección a través de \mathbf{C}_p sobre un plano normalizado denominado n-plano.

$$\bar{\mathbf{x}} = h(\mathbf{x}) \quad (2.3)$$

$$h(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z + \xi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

(Nótese que al trabajar con ecuaciones homogéneas la expresión presentada es equivalente a $h(\mathbf{x}) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \xi \right)^t$ que es la que se deduce de proyectar la intersección de la esfera a través del centro óptico \mathbf{C}_p .

Un tercer paso que consiste en aplicar la transformación lineal H_c nombrada anteriormente

$$\hat{\mathbf{x}} = H_c \bar{\mathbf{x}} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H}_c = \mathbf{K}_c \mathbf{R}_c \mathbf{M}_c \quad (2.6)$$

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} \psi - \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi - \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

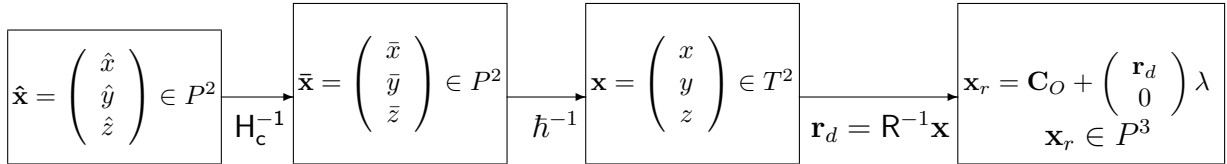
$$\mathbf{K}_c = \begin{pmatrix} f_x & s_{skew} & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

La relación entre las coordenadas homogéneas de la imagen $\hat{\mathbf{x}}$ y las coordenadas euclídeas en la imagen (u, v) se calcula dividiendo entre el vector entre la tercera componente.

$$u = \frac{\hat{x}}{\hat{z}} \quad v = \frac{\hat{y}}{\hat{z}}$$

La relación inversa viene definida por la inversa de la matriz \mathbf{H}_c y por la ecuación 2.9 que mapea cualquier punto de la imagen $\hat{\mathbf{x}}^\pm$ en un rayo 3D orientado.

$$\tilde{h}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} \frac{\bar{z}\xi + \sqrt{\bar{z}^2 + (1-\xi^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} \bar{x} \\ \frac{\bar{z}\xi + \sqrt{\bar{z}^2 + (1-\xi^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} \bar{y} \\ \frac{\bar{z}\xi + \sqrt{\bar{z}^2 + (1-\xi^2)(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)}}{\bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2} \bar{z} - \xi \end{pmatrix} \quad (2.9)$$



2.1. Proyección de una Recta

Sea Π el plano definido por la recta 3D y el origen de coordenadas del sistema catadióptrico central O (punto de vista efectivo) y descrito en coordenadas homogéneas como $\Pi = (n_x \ n_y \ n_z \ 0)^T$. Obsérvese que cualquier recta 3D contenida en este plano tendrá la misma proyección en una imagen debido a que el plano es el haz de rayos proyectados desde O .

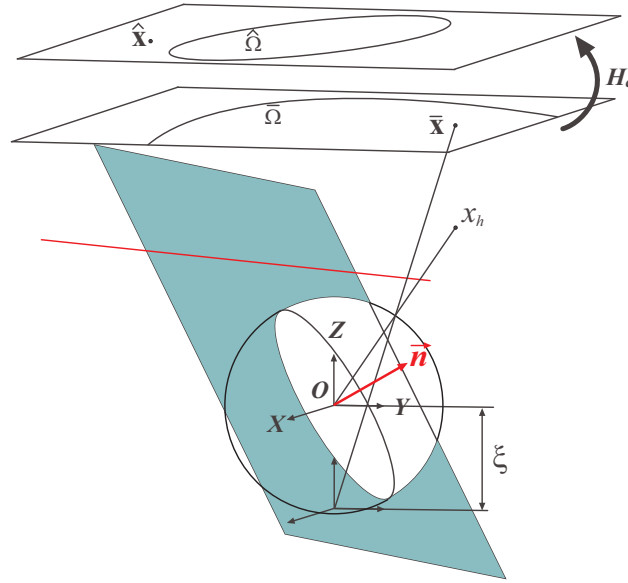


Figura 2.2: Modelo de la esfera para sistemas catadióptricos

$$\Pi^T \cdot \mathbf{X} = 0 \quad (2.10)$$

$$\begin{pmatrix} n_x & n_y & n_z & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad (2.11)$$

Proyectando la expresión del plano a un plano generico de distancia focal unidad y centrado en el origen definido por la matriz de proyección $\mathbf{P} = (\mathbf{I}|\mathbf{0})$ se obtiene la recta del plano definida por $\mathbf{n} = \mathbf{P}\Pi = (n_x \ n_y \ n_z)^T$.

La ecuación que define a la recta es $\mathbf{n}^T \mathbf{x} = 0$. Como $\mathbf{x} = \mathbf{h}^{-1}(\bar{\mathbf{x}})$ entonces $\mathbf{n}^T \mathbf{h}^{-1}(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Desarrollando esta expresión se llega a una igualdad que puede expresarse de la forma $\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\Omega} \bar{\mathbf{x}} = 0$ siendo $\bar{\Omega}$ la expresión matricial homogénea de la

cónica.

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} n_x^2(1-\xi^2) - n_z^2\xi^2 & n_x n_y(1-\xi^2) & n_x n_z \\ n_x n_y(1-\xi^2) & n_y^2(1-\xi^2) - n_z^2\xi^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

La imagen catadióptrica central de la recta es la cónica definida por $\bar{\Omega}$ después de la transformación proyectiva H_c .

$$\hat{\Omega} = H_c^{-T} \bar{\Omega} H_c^{-1} \quad (2.13)$$

$$\hat{\mathbf{x}}^t \hat{\Omega} \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad (2.14)$$

2.2. Mapas de Veronesse

Algunos autores [5, 7] solo tienen en cuenta la proyección positiva dada por la función h , en cambio otros [6] usan coordenadas extendidas para trabajar con las no linealidades que plantea la función h . Esta expansión del vector consiste en aplicar un mapa de veronese $V_{2,2}$ que extiende un vector de 3 coordenadas del espacio proyectivo P^2 en un vector de 6 coordenadas en el espacio proyectivo P^5 . Esta operación se describe en 2.15.

$$\tilde{\mathbf{x}} = (\hat{x}^2 \quad \hat{x}\hat{y} \quad \hat{y}^2 \quad \hat{x}\hat{z} \quad \hat{y}\hat{z} \quad \hat{z}^2)^T \quad (2.15)$$

Esto permite establecer una dualidad entre puntos, rectas y cónicas. Asimismo se expanden igualmente las coordenadas homogéneas del espacio a un espacio proyectivo P^9 y se usan matrices extendidas para calcular la matriz de proyección catadióptrica genérica.

$$\tilde{\mathbf{X}} = (X^2 \quad XY \quad Y^2 \quad XZ \quad YZ \quad Z^2 \quad XT \quad YT \quad ZT \quad T^2)^T$$

Sección 3

Calibración Interna del SCC. Comparativa de Métodos

En esta sección se aborda la parte del trabajo realizado dedicada a la calibración interna de sistemas catadióptricos centrales. La comparativa entre métodos de calibración que se presenta, plantea una reconstrucción tridimensional de un patrón de geometría bien conocida a partir de los datos de calibración que se obtienen de cada uno de ellos.

La comparativa se ha realizado entre cuatro métodos disponibles como código abierto en forma de utilidades para Matlab. El proceso de reconstrucción planteado permite comparar métodos que no están basados en el mismo modelo proyectivo, lo que añade la posibilidad de evaluar muchos otros métodos.

3.1. Sistema Catadióptico Utilizado

Para comparar los distintos métodos de calibración se ha calibrado un sistema hipercatadióptico. Este sistema está compuesto de una cámara perspectiva con una resolución de 1024 x 768 píxeles y un espejo hiperbólico de 60 mm de diámetro y parámetros geométricos conocidos $a = 281mm$ y $b = 234mm$. El parámetro del espejo según el modelo de la esfera es $\xi = 0,9662$.

3.1.1. Imágenes Utilizadas

Se ha realizado la calibración del sistema utilizando para cada método un set de imágenes específico, que busca la mejor calibración posible en cada uno de los métodos. Para la reconstrucción se ha utilizado un set de imágenes distinto a las

secuencias de calibración por dos motivos. El primero, es evitar dar ventaja a alguno de los métodos sobre otro. El segundo, es garantizar una traslación relativa entre las cámaras suficiente para la obtención de una buena reconstrucción debido a que esta condición es independiente de la calidad de la calibración pero influye notablemente en la calidad de la reconstrucción.

En definitiva se ha buscado obtener la mejor reconstrucción posible para cada método, manteniendo comunes las variables en las que no influye la calibración.

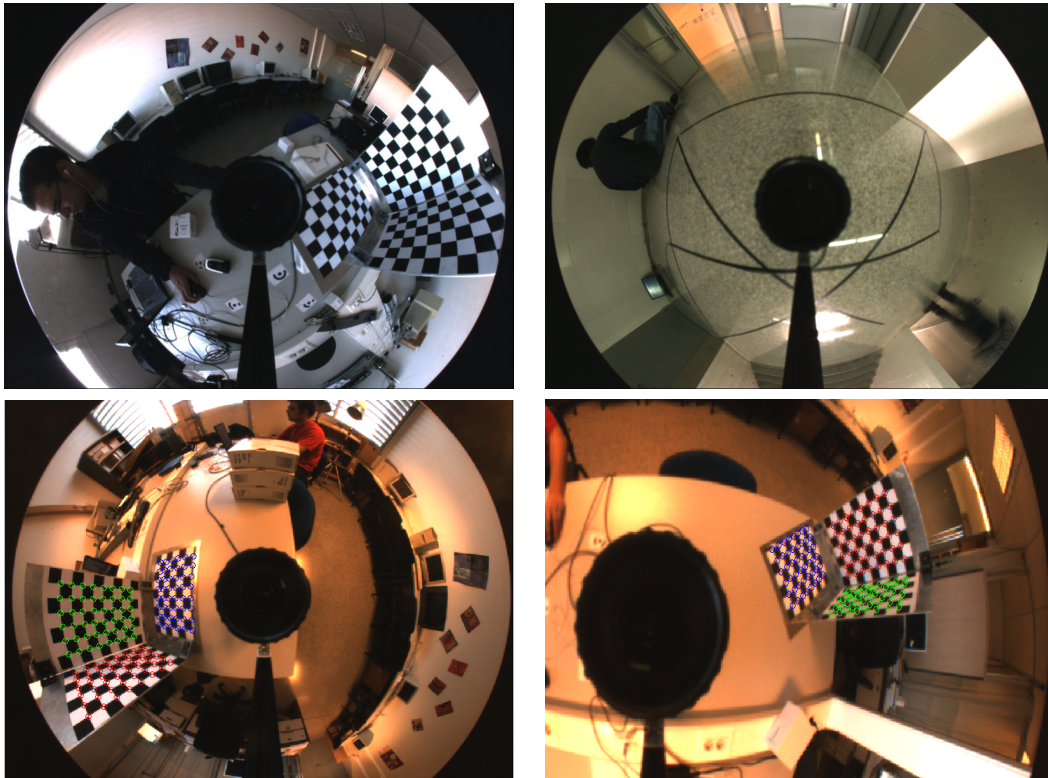


Figura 3.1: Imágenes utilizadas para la calibración y reconstrucción

3.1.2. Patrón Utilizado

Para comparar los métodos se ha construido un patrón 3D. Para obtener una reconstrucción 3D por ajuste de rayos se ha usado un software de reconstrucción fotogramétrica. Se han usado 6 vistas convergentes tomadas con una cámara calibrada de alta resolución. (Canon EOS 5D con 12.8Mpix.). La precisión estimada para el modelo tridimensional es menor de 0.1 mm. La figura 3.2 muestra la configuración usada para el experimento de Structure from Motion. Los ángulos entre los planos son $\alpha = 90,06^\circ$, $\beta = 89,60^\circ$ y $\gamma = 90,54^\circ$.

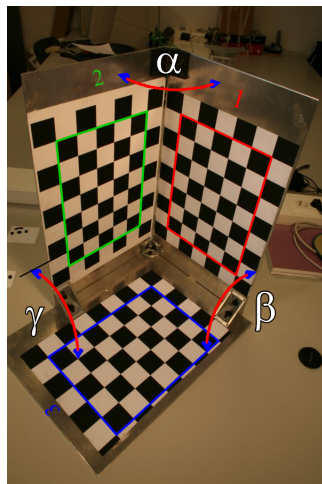


Figura 3.2: Patrón utilizado para el experimento de reconstrucción

3.2. Descripción de los Métodos de Calibración Utilizados

Tres de los métodos evaluados están basados en el modelo de la esfera mientras que el cuarto plantea un modelo de distorsión basado en series de Taylor. A continuación se describe brevemente las características particulares de cada método, del enfoque utilizado y del proceso de calibración específico de cada uno.

3.2.1. Enfoque de Patrón 2D Según el Modelo de la Esfera

Este enfoque [5] está basado en el modelo de la esfera expuesto en la sección 2. El modelo utilizado no tiene en cuenta la inversión simétrica inducida por el espejo (Sección 2) e incorpora un modelo de distorsión radial y tangencial basado en tres parámetros k_1 , k_2 y k_5 para la distorsión radial y otros dos k_3 y k_4 para la distorsión tangencial.

$$L(\rho) = 1 + k_1\rho^2 + k_2\rho^4 + k_5\rho^6$$
$$dx = \begin{bmatrix} 2k_3xy + k_4(\rho^2 + 2x^2) \\ k_3(\rho^2 + 2y^2) + 2k_4xy \end{bmatrix}$$

La matriz de proyección de la cámara proyectiva H_c tiene valores distintos para la distancia focal y tiene en cuenta el error antisimétrico (skew).

Este método utiliza varias imágenes de un patrón bidimensional en forma de tablero de ajedrez. Las dimensiones del patrón no son fijas y son especificadas a la aplicación antes del proceso de calibración. La situación del patrón respecto de la cámara debe variar en cada imagen.

Previamente a la ejecución del proceso de extracción y calibración la aplicación requiere cierta información previa que, basándose en la suposición de sistema paracatadióptrico (espejo parabólico $\xi = 1$), calcula una estimación de la calibración que es utilizada como semilla en el proceso no lineal y en el extractor automático. El sistema solicita al usuario una estimación del punto principal y una semilla para la detección del contorno circular que limita la superficie del espejo calculando mediante un método robusto el punto principal. Además, necesita un número de puntos superior a tres que se encuentren alineados en una dirección no radial. Asumiendo $\xi = 1$ se calcula una estimación para la distancia focal.

Las características utilizadas son esquinas de los cuadros negros y blancos del patrón. La aplicación pide al usuario las cuatro esquinas limítrofes. Conocidas las dimensiones del patrón que se han introducido anteriormente y la distancia focal y punto principal estimados en el apartado anterior, se rota un patrón 3D y re proyectan los puntos en un proceso no lineal hasta hacer coincidir éstos con los cuatro extremos del patrón. Las proyecciones de las esquinas interiores son re proyectadas y, alrededor de ellos, con una ventana fija, se busca mediante un extractor de Harris las esquinas que se utilizan en el proceso de calibración. Este extractor automático tiene un buen comportamiento con las imágenes en las que el patrón se encuentra alejado de la corona exterior. Desgraciadamente esta zona resulta crucial para una calibración del sistema debido a que es donde la distorsión radial provocada por el espejo se manifiesta mas claramente. Dependiendo del sistema, la opción mas viable es desactivar el extractor automático y seleccionar todos los puntos manualmente.

El proceso de calibración basa su funcionamiento en un ajuste no lineal (Levenberg-Marquardt) basado en la distancia euclídea entre las re proyecciones del patrón definido a partir de la geometría dada y las esquinas extraídas.

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [G(V, \mathbf{X}_i) - \mathbf{x}_i]^2 \quad (3.1)$$

El proceso permite la variación de la orientación y traslación de la cámara (definidos por un cuaternión y un vector de traslación V^1), el parámetro del espejo (ξ), los coeficientes de distorsión (k_1, k_2, k_3, k_4 y k_5) y la matriz de proyección de la cámara en la que el parámetro η y la distancia focal están acoplados en el paráme-

tro γ .

Como semilla para el proceso se utilizan las estimaciones de la distancia focal acoplada y el punto principal calculados previamente. También se asumen una serie de aproximaciones que se presentan a continuación.

- sistema paracatadióptrico $\xi = 1$
- error de distorsión pequeño $k_1 = k_2 = k_3 = p_1 = p_2 = \alpha = 0$
- píxel cuadrado $\gamma_1 = \gamma_2$

3.2.2. Enfoque de Proyección de Rectas con el Modelo de la Esfera

Este método está basado en la proyección de rectas en imágenes omnidireccionales según el modelo de la esfera. El modelo utilizado no contempla distorsión en la cámara perspectiva. Como se muestra en la sección 2.1 la proyección de una recta del espacio es una cónica. En su artículo [7] Barreto demuestra la posibilidad de obtener la cónica absoluta $\hat{\Omega}_\infty$ a partir de al menos tres cónicas en la imagen. Para calcular $\hat{\Omega}_\infty$ primero se necesita ($\hat{\pi} = \hat{\Omega}\hat{\mathbf{O}}$) la recta polar del centro de la imagen $\hat{\mathbf{O}}$ respecto de la cónica $\hat{\Omega}$.

Esta recta intersecta $\hat{\Omega}$ en dos puntos $\hat{\mathbf{I}}$ y $\hat{\mathbf{J}}$ que están contenidos en la cónica absoluta. Con los 6 puntos proporcionados por las tres cónicas se puede ajustar la cónica absoluta. A partir de la cónica absoluta se extrae H_c por descomposición de Cholesky. El parámetro del espejo ξ esta relacionado mediante el ratio cruzado con la proyección del origen y con los puntos geométricos $\hat{\mathbf{D}}_i$, $\hat{\mathbf{N}}_i$ y $\hat{\mathbf{C}}_i$ definidos en detalle junto con sus propiedades en [7].

$$\xi = \sqrt{\left\{ \hat{\mathbf{O}}, \hat{\mathbf{D}}_i, \hat{\mathbf{N}}_i, \hat{\mathbf{C}}_i \right\}}$$

Este método está muy condicionado por el arco de cónica que se abarca en la imagen. La curvatura de las proyecciones de rectas no es muy acusada y para obtener una extracción aceptable las rectas deben acercarse a los límites del espejo. La metodología propuesta y la adoptada en este caso es el trazo en el suelo de rectas de longitud considerable intentando que rodeen completamente el centro de la imagen. En el experimento realizado se utilizó una imagen omnidireccional que contenía las proyecciones de seis rectas. La cámara se sitúa a una distancia de 30 cm del suelo. Fig 3.1.

3.2.3. Enfoque por Transformación Lineal Directa

Este método usa el modelo de la esfera basado en mapas de Veronesse con coordenadas extendidas que linealiza la no linealidad presentada por la proyección. Se utiliza una transformación lineal directa para calcular una estimación de la calibración que posteriormente se utiliza como semilla en una optimización no lineal. Esta semilla se calcula sin información previa como se describe a continuación.

La entrada para este procedimiento es un conjunto de al menos 20 correspondencias 2D/3D distribuidos en 3 planos diferentes. Los puntos 2D se obtienen manualmente a partir de una imagen omnidireccional de un patrón. Los puntos 3D se obtienen por reconstrucción de este mismo patrón utilizando por ejemplo dos imágenes de una cámara perspectiva. La orientación y traslación entre la reconstrucción 3D y la cámara omnidireccional es calculada por el método, lo que permite que la reconstrucción 3D del patrón pueda ser reutilizada para futuras calibraciones siempre y cuando se utilice el mismo patrón.

Estos puntos correspondientes 2D y 3D, una vez extendidos, están relacionados entre sí por una matriz de proyección extendida P_{cata} que incluye los parámetros extrínsecos e intrínsecos.

$$P_{cata} = \underbrace{\tilde{H}_c X_\xi}_{A_{cata}} \underbrace{\tilde{R}_{6x6} \left(\begin{array}{c} I_6 \\ T_{6x4} \end{array} \right)}_{T_{cata}} \quad (3.2)$$

donde \tilde{R} y \tilde{T} son matrices extendidas representando la rotación y traslación relativas entre la reconstrucción 3D y la cámara omnidireccional, X_ξ es la matriz que linealiza la función no lineal \tilde{h} y H_c es la matriz de correlación extendida.

En [6] se describe el procedimiento para descomponer P_{cata} en A_{cata} y T_{cata} desacoplando los parámetros intrínsecos y extrínsecos y la extracción de la calibración a partir de estas matrices extendidas.

Con esta información se inicializa una optimización no lineal que incluye un modelo de distorsión radial y tangencial similar al utilizado por Mei en [5].

3.2.4. Enfoque de Modelo de Distorsión con Patrón 2D

En este enfoque el modelo adoptado es la descripción de la proyección mediante una serie de Taylor. Ésto hace de este método el mas general de los analizados ya que permite trabajar además de con sistemas omnidireccionales con cualquier tipo de sensor basado en cámara fotográfica. Por contra, un sistema calibrado me-

diante este método no podrá beneficiarse de las propiedades derivadas del modelo geométrico de la esfera. Los datos obtenidos con este método no pueden por ejemplo utilizarse en la segunda parte de este proyecto que trabaja con los parámetros del espejo específicos del modelo de la esfera.

En este modelo se define al igual que en el modelo de la esfera un plano normalizado relacionado con el plano del sensor mediante una transformación afín que se puede simplificar con un factor de escala α . (x' pertenece al plano normalizado y x'' al plano del sensor). La función de proyección g , engloba la relación entre un punto \mathbf{x}'' en el plano del sensor y el vector \mathbf{p} que define la dirección de la recta que une el origen del sistema de referencia O con el punto de la escena \mathbf{X}

$$\lambda \mathbf{p} = \lambda g(\mathbf{x}'') = \lambda g(\alpha \mathbf{x}') = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad \lambda > 0 \quad (3.3)$$

$$g(\mathbf{x}') = (x' \quad y' \quad f(x', y'))^t \quad (3.4)$$

$$f(x', y') = a_0 + a_1 \rho' + a_2 \rho'^2 + \dots + a_n \rho'^n \quad (3.5)$$

donde f es la expansión por serie de Taylor de la distorsión, \mathbf{P} la matriz proyectiva que transforma un punto del espacio en un punto del plano proyectivo y λ el factor de profundidad. El proceso de calibración esta basado en un ajuste de la reproyección por mínimos cuadrados en dos etapas una lineal y otra no lineal en el que se calculan los $n + 1$ coeficientes de la función f . Asumiendo que los puntos pertenecen a un plano se reduce el número de parámetros extrínsecos a calcular de manera que cada punto de la imagen aporta tres ecuaciones.

$$v_j (r_{31}X_j + r_{32}Y_j + t_3) - f(\rho_j) (r_{21}X_j + r_{22}Y_j + t_2) = 0 \quad (3.6)$$

$$f(\rho_j) (r_{11}X_j + r_{12}Y_j + t_1) - u_j (r_{31}X_j + r_{32}Y_j + t_3) = 0 \quad (3.7)$$

$$u_j (r_{21}X_j + r_{22}Y_j + t_2) - v_j (r_{11}X_j + r_{12}Y_j + t_1) = 0 \quad (3.8)$$

Con m puntos a partir de la ecuación 3.8 se puede construir un sistema lineal de m ecuaciones que permite resolver mediante descomposición de valores singulares los parámetros $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, t_1, t_2$. En una segunda fase y mediante una pseudo-inversa se resuelven las ecuaciones 3.6 y 3.7. Finalmente la utilidad da la opción de afinar el resultado mediante una optimización no lineal usando el algoritmo de Gauss-Newton.

Para este método se han utilizado las mismas 11 imágenes que en el enfoque

	ξ	(u_o, v_o)
Ground Truth	0.9662	(511,88, 399,25)
Mei	0.9684	(513,93, 400,76)
Barreto	1.0215	(523,82, 416,29)
DLT	0.9868	(509,95, 398,54)

Tabla 3.1: Calibración basada en el modelo de la esfera

de Esfera-Patrón2D, los puntos son seleccionados manualmente como esquinas de un patrón de ajedrez y es necesario cubrir la corona exterior del espejo donde la distorsión se manifiesta mejor para calibrar de forma correcta el sistema.

3.3. Métodos de Análisis y Experimentos

Para realizar la comparativa entre los distintos métodos de calibración se han abordado diversos planteamientos. En primer lugar se han comparado entre sí los datos de calibración interna aportados por cada método. En la tabla 3.1 se presentan las estimaciones de cada método para el punto principal (u_o, v_o) y para el parámetro del espejo ξ . El enfoque Distorsión-Patrón2D no ofrece información sobre el sistema catadióptrico como consecuencia de utilizar un modelo genérico.

3.3.1. Reconstrucción Tridimensional del Patrón

Para comparar los distintos métodos utilizados para calibrar sistemas catadióptricos centrales se ha decidido desarrollar una tarea en la que sea necesaria una cámara calibrada. Siguiendo el planteamiento de visión estereo se ha escogido el algoritmo de "Structure from Motion" a partir de dos cámaras omnidireccionales calibradas. Como no se trabaja en tiempo real y la geometría del patrón es estática las dos cámaras pueden ser simuladas por dos imágenes tomadas por una misma cámara en dos instantes diferentes.

En primer lugar, se seleccionan manualmente en ambas imágenes puntos correspondientes. El uso de modelos diferentes obliga a separar el proceso en dos partes. Una específica de cada modelo, que modela la proyección inversa, y otra común que reconstruye el patrón tridimensional y lo compara con la reconstrucción de referencia.

A través del modelo de proyección inverso se calcula para cada punto seleccionado el rayo correspondiente. Este proceso obtiene dos haces de rayos, cada uno de ellos en su sistema de referencia, por cada método de calibración. Existe una

correspondencia entre cada rayo de cada haz. Si el i -ésimo rayo del primer haz es una proyección en la cámara 1 del punto \mathbf{X}_i la proyección de este punto en la cámara 2 es corresponde con el i -ésimo rayo del segundo haz. El procedimiento que se va a describir a continuación se realiza para cada par de haces de rayos.

El plano definido por cada par de rayos correspondientes contiene al vector \mathbf{t}_{21} que es la traslación del origen de la cámara 1 desde la cámara 2. Esta condición de coplanaridad se cumple para cada par de rayos y se conoce como geometría epipolar.

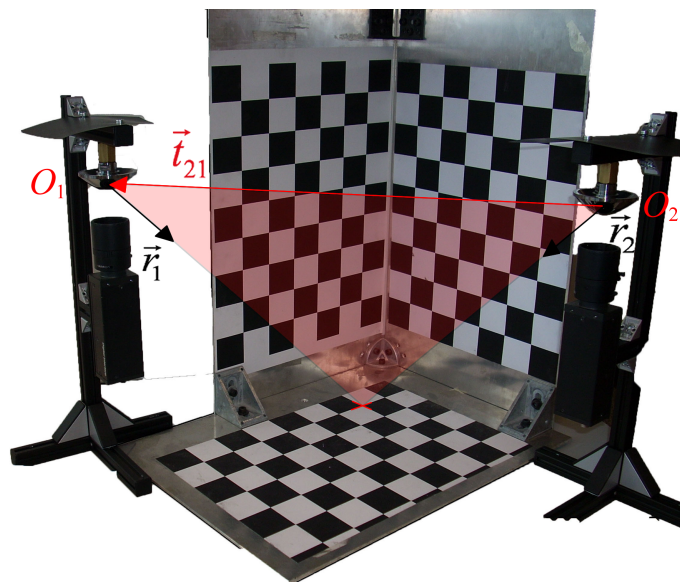


Figura 3.3: Condición de coplanaridad entre los rayos que proyecta un punto en cada cámara y la traslación relativa entre ambas

Situado el origen de coordenadas en la referencia de la cámara 2 y trabajando en coordenadas euclídeas el plano que contiene al rayo 1 y a \mathbf{t}_{21} queda definido por su normal \mathbf{n} a través del producto vectorial $\mathbf{n} = \mathbf{t}_{21} \times \{\mathbf{r}_1\}_2 = \mathbf{t}_{21} \times \mathbf{R}_{21}\mathbf{r}_1$.

El rayo 2 pertenecerá a ese plano si cumple la condición $\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n} = 0$. Ésto se resume en la expresión $\mathbf{r}_2 \cdot (\mathbf{t}_{21} \times \mathbf{R}_{21}\mathbf{r}_1) = 0$ que puede expresarse matricialmente como $\mathbf{r}_2^T [\mathbf{t}_{21}]_{\times} \mathbf{R}_{21}\mathbf{r}_1 = 0$ codificando el producto vectorial en la matriz $[\mathbf{t}_{21}]_{\times}$. La condición anterior queda definida por la matriz esencial \mathbf{E} que se cumple para todos los rayos y que codifica la rotación y traslación de la cámara 1 respecto de

la cámara 2.

$$[\mathbf{t}_{21}]_{\times} = \begin{pmatrix} 0 & -t_{21z} & t_{21y} \\ t_{21z} & 0 & -t_{21x} \\ -t_{21y} & t_{21x} & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{r}_2^T \mathbf{E}_{21} \mathbf{r}_1 = 0 \quad \mathbf{E}_{21} = [\mathbf{t}_{21}]_{\times} \mathbf{R}_{21} \quad (3.9)$$

Si se expresa la relación anterior como un producto del vector fila por el vector columna de vectores $\mathbf{a}_i^T \cdot \mathbf{e} = 0$, condición que se cumple para cada par de rayos i , se puede construir la matriz \mathbf{A} tal que $\mathbf{A}\mathbf{e} = \mathbf{0}$. Mediante descomposición por valores singulares, se calculan los coeficientes de la matriz esencial utilizando al menos ocho pares de rayos.

$$\mathbf{a}_i = \left(r_{2x}r_{1x} \quad r_{2x}r_{1y} \quad r_{2x}r_{1z} \quad r_{2y}r_{1x} \quad r_{2y}r_{1y} \quad r_{2y}r_{1z} \quad r_{2z}r_{1x} \quad r_{2z}r_{1y} \quad r_{2z}r_{1z} \right)^T \quad (3.10)$$

$$\mathbf{e} = \left(E_{11} \quad E_{12} \quad E_{13} \quad E_{21} \quad E_{22} \quad E_{23} \quad E_{31} \quad E_{32} \quad E_{33} \right)^T \quad (3.11)$$

$$\mathbf{A} = \left(a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n \right)^T \quad (3.12)$$

La rotación y traslación que representa esta matriz esencial se puede extraer mediante la descomposición en valores singulares de la matriz esencial. Siendo el resultado de la descomposición las matrices \mathbf{U} , \mathbf{S} y \mathbf{V} cuyo producto es igual a la matriz original \mathbf{E} , ($\mathbf{E}_{21} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{V}^T$) la traslación entre las cámaras \mathbf{t}_{21} viene definida por el producto de la matriz \mathbf{U} por el vector de la recta en el infinito y se definen dos matrices de rotación a partir de la matriz \mathbf{W} . Se obtienen cuatro soluciones distintas de las cuales solo una es geoméricamente consistente.

$$\mathbf{t}_{21} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{R}_a = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{U}^T \quad \mathbf{R}_a = \mathbf{U}\mathbf{W}\mathbf{U}^T$$

Una vez identificada la solución consistente se pueden expresar el haz de rayos de la cámara 1 en la referencia de la cámara 2. Resolviendo El sistema lineal 3.13¹,

¹La notación r_{1y2} representa a la componente y del vector r_1 con orientación relativa a la referencia 2

	Error entre los puntos 3D estimados y los reales		
	Media	σ	Máximo
Esfera-Patrón2D	1.4166	0.8348	4.1243
DLT	1.0377	0.5675	3.4877
Esfera-Rectas	2.0129	0.9828	4.7089
Distorsión-Patrón2D	1.2744	0.7813	3.9996

Tabla 3.2: Precisión de la medida de coordenadas 3D

que expresa en coordenadas homogéneas la triangulación de dos rayos, se resuelve por descomposición de valores singulares.

$$\begin{pmatrix} r_{1y}|_2 & -r_{1x}|_2 & 0 & -r_{1y}|_2 t_{21x} + r_{1x}|_2 t_{21y} \\ r_{1z}|_2 & 0 & -r_{1x}|_x & -r_{1z}|_z t_{21x} + r_{1x}|_2 t_{21z} \\ r_{2y} & -r_{2x} & 0 & 0 \\ r_{2z} & 0 & -r_{2x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.13)$$

Esta primera reconstrucción es refinada mediante un ajuste de haces no lineal basado en minimizar un error de reproyección. Se han utilizado 144 pares de rayos utilizados para la reconstrucción del patrón. Una vez obtenida una reconstrucción precisa se introduce en el modelo reconstruido la métrica del patrón real y se realiza el análisis en base a dos criterios para medir la precisión de cada método. Estos criterios son:

- El error promedio entre los puntos 3D reales y sus estimaciones
- El ángulo entre los planos

En la tabla 3.2 se observa la precisión en milímetros de la reconstrucción del patrón 3D para cada uno de los enfoques. Este experimento muestra que ninguna de las reconstrucciones alcanza un error medio mayor de 3mm. La mejor reconstrucción se ha obtenido con la calibración dada por el algoritmo DLT con un error medio de 0.10377 mm. En la tabla 3.3 se pueden ver los resultados según el segundo criterio. Los ángulos α , β y γ representan el ángulo entre los tres planos y E_{angle} es la diferencia entre la estimación y el Ground Truth (referencia tierra) Se observa que en el último experimento el resultado es similar para todos los métodos. El mayor error es de 1.85 grados calculado según el modelo de Esfera-Rectas. Incluso se da la situación de que el enfoque Distorsión-Patrón2D tiene un error de 1.31 grados en uno de los ángulos aunque sea este mismo enfoque el que consigue el menor de los errores con 0.6066 grados para otro de los ángulos.

	Ángulo entre planos		
	α/E_α	β/E_β	γ/E_γ
Referencia patrón	90.06	89.60	90.54
Esfera-Patrón2D	89.48/0.58	88.93/0.67	89.80/0.74
DLT	89.22/0.84	90.55/-0.95	89.73/ 0.81
Esfera-Rectas	89.99/0.07	90.98/-1.38	89.74/0.8
Distorsión-Patrón2D	89.75/0.31	89.80/-0.20	89.23/1.31

Tabla 3.3: Ángulos y error estimados entre los 3 planos del patrón

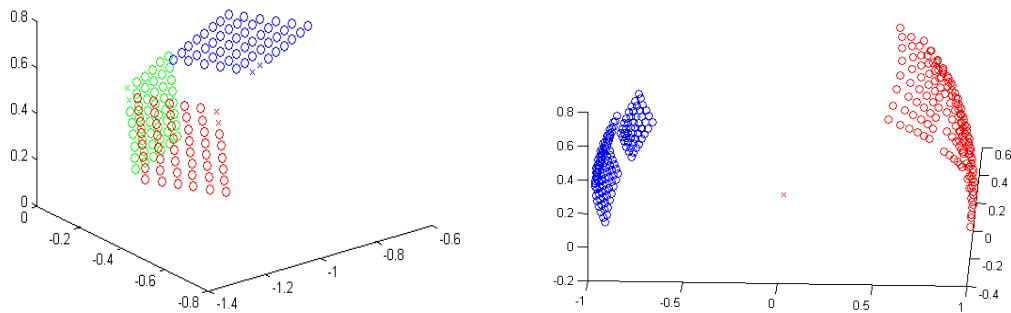


Figura 3.4: Proyección de rayos sobre la esfera y reconstrucción del patrón 3D

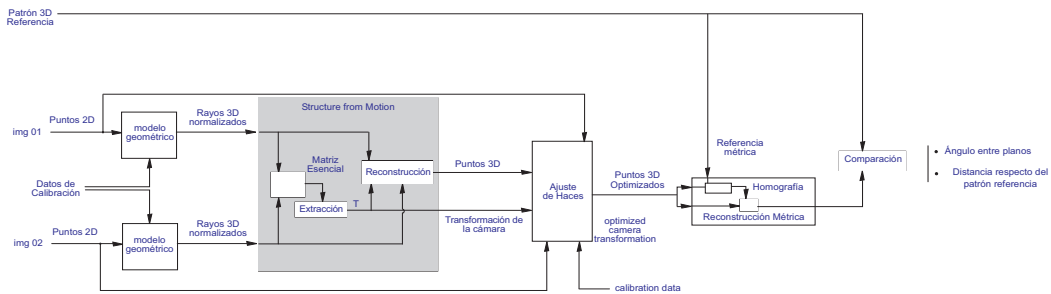


Figura 3.5: Diagrama de flujo del proceso de reconstrucción

3.3.2. Error de Reproyección

Se ha medido el error entre los puntos de la imagen original y los puntos reproyectados del patrón 3D de referencia. El resultado es dado en píxeles y puede verse en la tabla 3.4. Como se observa el menor error corresponde al enfoque DLT con

	Media	σ	Máximo
Esfera-Patrón2D	0.4619	0.3041	2.0478
DLT	0.3281	0.2013	1.3740
Esfera-Rectas	0.7098	0.5422	2.9197
Distorsión-Patrón2D	0.3895	0.2703	1.5978

Tabla 3.4: Error de reproyección en píxeles

un error de 0.2013 píxeles. Una vez más, se observa que el error dado por el resto de métodos es igualmente pequeño. Todos ellos se hallan por debajo de 1 píxel de error. Tras todos estos experimentos se observa que el comportamiento de todos los enfoques es bastante similar.

Los enfoques basados en patrones 2D obtienen buenos resultados pero necesitan varias imágenes de las que extraer esquinas. La mayoría de las veces las esquinas tienen que ser seleccionadas manualmente. El enfoque Esfera-Patrón2D requiere en un principio al menos tres puntos que pertenezcan a la proyección de una recta no radial para calcular la inicialización de la distancia focal. El enfoque DLT no requiere ninguna información a priori y solo necesita una única imagen pero a cambio requiere que los puntos esquina estén distribuidos por tres planos distintos.

El enfoque basado en proyecciones de rectas [7] no requiere un patrón específico o varias imágenes, requiere al menos tres rectas en una única imagen omnidireccional. En la práctica las rectas deben ser lo suficientemente largas para que un porcentaje elevado de la cónica este representada y para que se aprecie correctamente la curvatura de ésta. Este enfoque realiza un cálculo del punto principal a partir de las cónicas que puede dar una idea de si el proceso de calibración ha ido correctamente. Una cuestión común a todos los métodos es, que tanto las rectas como los puntos deben cubrir la mayor área posible de la imagen omnidireccional. Especialmente en el area periférica, mucho más sensible a un cambio de calibración. Después de un cálculo lineal todos los enfoques optimizan el resultado final mediante un proceso no lineal.

Sección 4

Calibración externa: Cálculo de la Orientación de la Cámara y Rectificación

La segunda parte de este proyecto, dedicada a la autocalibración externa, plantea una aplicación que, partiendo de la calibración interna, sea capaz de calcular la orientación de la cámara respecto de una referencia dada. Esta orientación se utiliza para rectificar la imagen original, obteniendo una imagen equivalente que pueda ser utilizada en procesos que asuman como premisa una reducción de los grados de libertad del sistema. La referencia adoptada es una orientación tal que la dirección del sistema cámara-espejo este en posición vertical. Para ello se asume que la mayoría de segmentos de recta, en un entorno hecho por el hombre tienen como direcciones dominantes la vertical y horizontal.

Un ejemplo de aplicación de este procedimiento puede ser la adaptación de algoritmos pensados para cámaras montadas sobre dispositivos con ruedas a otro tipo de dispositivos cuyo movimiento esté basado en piernas-articuladas. También resulta útil para corregir la oscilación en cámaras transportadas por seres humanos en movimiento.

El procedimiento utilizado está basado en el cálculo de la orientación de la escena. El método empleado se basa en la detección de puntos de fuga en imágenes omnidireccionales, cuya geometría es más compleja que el de las cámaras perspectivas. A continuación se muestra una descripción general del proceso completo:

1. Se extraen las cónicas de la imagen omnidireccional. Estas cónicas están condicionadas por la calibración y son ajustadas mediante técnicas de ajuste robusto.

2. Se calcula la intersección para cada par de cónicas. Estas intersecciones son las candidatas al punto de fuga de las rectas verticales.
3. Partiendo de la suposición de que la mayoría de los segmentos rectos de la escena son verticales u horizontales se estima el punto de fuga característico de las rectas verticales.
4. A partir del punto de fuga se calcula la orientación del sistema cámara-espejo respecto a la referencia absoluta.
5. La orientación calculada se utiliza para rectificar la imagen con respecto al sistema de referencia adoptado.

4.1. Extracción de Cónicas

Como se describe en la sección 2.1 la proyección de una recta del espacio en un sistema catadióptrico central es una curva cónica.

En esta sección se aborda el proceso de extracción de cónicas a partir de la imagen omnidireccional. El proceso esta dividido en dos subprocesos.

1. Se detectan y clasifican los contornos presentes en la imagen.
2. A partir de los componentes conexos se realiza un ajuste robusto basado en muestras aleatorias. Los elementos a ajustar son cónicas condicionadas por la calibración, definidas por dos puntos.

4.1.1. Detección de Puntos Contorno y Clasificación según Conectividad

A la imagen de entrada se le aplica un detector de contornos que devuelve una secuencia de puntos frontera, supuestas proyecciones de los segmentos de la escena. Para la detección de los contornos frontera se ha utilizado el detector de Canny ¹. La razón por la que se ha elegido este detector de entre los múltiples existentes es su buen comportamiento para detectar trazos conectados. El algoritmo propuesto agrupa los contornos en trazos conectados para reducir el tiempo de cálculo del procedimiento robusto de ajuste de cónicas. En contraste con la buena información de base que proporciona, Canny es un algoritmo de detección relativamente costoso que puede ser sustituido en función de las necesidades de la aplicación.

¹Implementado con la función 'edge' de Matlab

Un paso previo a la detección de contornos es la eliminación de zonas en la imagen que no contienen información por medio de una máscara. Estas zonas son la imagen del objetivo de la cámara y las zonas fuera del espejo. La obtención de esta información se puede englobar en el proceso de calibración previo de la cámara y el espejo y reduce el coste computacional del algoritmo.

4.1.2. Ajuste de una Cónica en el N-plano a partir de Dos Puntos y la Calibración Interna

El ajuste de una cónica en su caso general requiere de al menos 5 puntos. La expresión explícita de la cónica se describe con 6 coeficientes.

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$$

$$(c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6) \lambda = 0$$

$$\lambda = \frac{1}{c_1}$$

$$x^2 + \frac{c_2}{c_1}xy + \frac{c_3}{c_1}y^2 + \frac{c_4}{c_1}x + \frac{c_5}{c_1}y + \frac{c_6}{c_1} = x^2 + c'_1xy + c'_2y^2 + c'_3x + c'_4y + c'_5 = 0$$

La ecuación se sigue cumpliendo si se multiplica por cualquier factor lo que hace que sólo 5 de estos coeficientes sean independientes. En el caso que se aborda en este proyecto, los coeficientes presentan restricciones adicionales entre sí, que permiten hallar una solución con dos puntos. Para abordar este problema se retoma la expresión de la proyección de la recta del espacio en un sistema catadióptrico que se ha presentado en la sección 2.1. Barreto describe el proceso de proyección en dos pasos. El primero es una transformación \tilde{h} que encapsula las no-linealidades del proceso de proyección. El segundo es una transformación proyectiva representada por la matriz H_c . Este espacio antes de la transformación proyectiva H_c se conoce como plano normalizado (n-plano) y la proyección de una recta espacial en él es una cónica representada por la matriz omega $\tilde{\Omega}$.

$$\bar{\mathbf{x}}^t \tilde{\Omega} \bar{\mathbf{x}} = 0$$

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} n_x^2(1 - \xi^2) - n_z^2\xi^2 & n_x n_y(1 - \xi^2) & n_x n_z \\ n_x n_y(1 - \xi^2) & n_y^2(1 - \xi^2) - n_z^2\xi^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix}$$

donde n_x, n_y y n_z describen la normal al plano que contiene a la recta y el origen del sistema catadióptrico O. En este proyecto se plantea la manipulación algebraica de esta expresión para separar los parámetros que dependen de la calibración de los que no. Los datos a utilizar como entrada son los puntos en el n-plano $\bar{\mathbf{x}}$ que

se calculan a partir de los puntos de la imagen, a través de la inversa de la matriz H_c .

$$\bar{\mathbf{x}} = H_c^{-1} \hat{\mathbf{x}}$$

Definiendo $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x} \ \bar{y} \ \bar{z})^T$ la expresión $\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\Omega} \bar{\mathbf{x}} = 0$ desarrollada en forma de ecuación queda de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} (n_x^2 (1 - \xi^2) - \xi^2 n_z^2) \bar{x}^2 + 2n_x n_y (1 - \xi^2) \bar{x} \bar{y} + (n_y^2 (1 - \xi^2) - \xi^2 n_z^2) \bar{y}^2 + \dots \\ \dots + 2n_x n_z \bar{x} + 2n_y n_z \bar{y} + n_z^2 = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Operando algebraicamente se pueden separar los parámetros que dependen de la calibración de los que no.

$$(1 - \xi^2) (n_x^2 \bar{x}^2 + 2n_x n_y \bar{x} \bar{y} + n_y^2 \bar{y}^2) + 2n_z (n_x \bar{x} + n_y \bar{y}) + n_z^2 - \xi^2 n_z^2 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) = 0 \quad (4.2)$$

Para ello se define un parámetro α que encapsula la información de la recta expresada en forma de normal al plano.

$$(1 - \xi^2) (n_x \bar{x} + n_y \bar{y})^2 + 2n_z (n_x \bar{x} + n_y \bar{y}) + n_z^2 (1 - \xi^2 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)) = 0 \quad (4.3)$$

$$(1 - \xi^2) \alpha^2 + 2\alpha + (1 - \xi^2 r^2) = 0 \quad (4.4)$$

$$r^2 \equiv (\bar{x}^2 + \bar{y}^2) \quad (4.5)$$

$$\alpha = \frac{n_x \bar{x} + n_y \bar{y}}{n_z} \quad (4.6)$$

Observese que esta ecuación introduce una discontinuidad cuando $n_z = 0$ situación característica de una recta 3D vertical. En esta situación la proyección de una recta del espacio en la imagen omnidireccional es una cónica degenerada a una recta independiente de la calibración. Esta discontinuidad puede suponer un problema de convergencia en este proyecto donde el objetivo es una configuración en la que la mayoría de los contornos rectos sean verticales. Los errores derivados del mal condicionamiento del cálculo aumentan cuando más cerca se está del objetivo.

Para evitar este problema, la discontinuidad se puede trasladar de las rectas

verticales a las rectas horizontales definiendo la variable β en vez de la variable α .

$$(1 - \xi^2 r^2) \beta^2 + 2\beta + (1 - \xi^2) = 0 \quad (4.7)$$

$$\beta = \frac{n_z}{n_x \bar{x} + n_y \bar{y}} \quad (4.8)$$

Partiendo de estas expresiones se puede calcular α o β a partir de un punto del n-plano y con el coeficiente del espejo ξ . La transformación de un punto de la imagen a un punto del n-plano viene dada por la expresión lineal $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{H}_c^{-1} \hat{\mathbf{x}}$. Tanto \mathbf{H}_c como ξ son variables que dependen únicamente de la calibración del sistema.

$$\alpha = -\frac{1}{1 - \xi^2} \pm \frac{\xi}{1 - \xi^2} \sqrt{1 + r^2 (1 - \xi^2)} \quad (4.9)$$

$$\beta = -\frac{1}{1 - \xi^2 r^2} \pm \frac{\xi}{1 - \xi^2 r^2} \sqrt{1 + r^2 (1 - \xi^2)} \quad (4.10)$$

Se puede identificar rectas verticales $\beta = 0$ fácilmente utilizando un umbral $|\beta| < \text{threshold}$ y considerar el caso particular en que $n_x x + n_y y = 0$. Una vez calculado β en caso de no detectarse el caso singular de cónica degenerada se puede calcular α fácilmente $\alpha = \frac{1}{\beta}$.

Caso General

Considérese el caso en que tenemos dos puntos en la imagen $\hat{\mathbf{x}}_1, \hat{\mathbf{x}}_2$ que pertenecen a la proyección de la recta 3D. Con la calibración del sistema, a través de \mathbf{H}_c , tenemos definidos los puntos correspondientes en el n-plano $\bar{\mathbf{x}}_1 = (x_1 \ y_1 \ 1)^T$ y $\bar{\mathbf{x}}_2 = (x_2 \ y_2 \ 1)^T$. Con la ecuación 4.10 se calcula β_1 para el punto 1 y β_2 para el punto 2. Notese que aunque del cálculo se deducen dos valores para β_1 y β_2 únicamente uno de los dos tiene sentido físico generando el otro una cónica complementaria. A partir de la definición de α y β se obtiene el sistema lineal:

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & -\frac{1}{\beta_1} \\ x_2 & y_2 & -\frac{1}{\beta_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

que expresado en función de α es

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & -\alpha_1 \\ x_2 & y_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

despejando n_x y n_y en función de n_z se tiene

$$n_x = \frac{\alpha_2 y_1 - \alpha_1 y_2}{x_2 y_1 - x_1 y_2} n_z \quad (4.13)$$

$$n_y = \frac{\alpha_1 x_2 - \alpha_2 x_1}{x_2 y_1 - x_1 y_2} n_z \quad (4.14)$$

El plano Π está completamente definido por \mathbf{n} que puede ser cualquier vector normal definido en el espacio con dos parámetros. Dado que el plano está definido por la orientación y no por el módulo y que se conoce un punto del plano (el origen del sistema catadióptrico central \mathbf{O}), se puede introducir una tercera condición a la hora de calcular \mathbf{n} . Se asume que \mathbf{n} es ortonormal

$$\begin{aligned} n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 &= 1 \\ n_z &= \frac{\bar{x}_2 \bar{y}_1 - \bar{x}_1 \bar{y}_2}{\sqrt{(\bar{x}_2 \bar{y}_1 - \bar{x}_1 \bar{y}_2)^2 + (\alpha_2 \bar{y}_1 - \alpha_1 \bar{y}_2)^2 + (\alpha_1 \bar{x}_2 - \alpha_2 \bar{x}_1)^2}} \\ n_x &= \frac{\alpha_2 \bar{y}_1 - \alpha_1 \bar{y}_2}{\sqrt{(\bar{x}_2 \bar{y}_1 - \bar{x}_1 \bar{y}_2)^2 + (\alpha_2 \bar{y}_1 - \alpha_1 \bar{y}_2)^2 + (\alpha_1 \bar{x}_2 - \alpha_2 \bar{x}_1)^2}} \\ n_y &= \frac{\alpha_1 \bar{x}_2 - \alpha_2 \bar{x}_1}{\sqrt{(\bar{x}_2 \bar{y}_1 - \bar{x}_1 \bar{y}_2)^2 + (\alpha_2 \bar{y}_1 - \alpha_1 \bar{y}_2)^2 + (\alpha_1 \bar{x}_2 - \alpha_2 \bar{x}_1)^2}} \end{aligned}$$

Configuración Singular

En el caso singular en que $n_z = 0$ la cónica $\bar{\Omega}$ es degenerada y la ecuación de la cónica en el n -plano se expresa de la manera siguiente.

$$(1 - \xi^2) (n_x^2 \bar{x}^2 + 2n_x n_y \bar{x} \bar{y} + n_y^2 \bar{y}^2) = 0$$

Si $\xi \neq 1$ entonces $(n_x \bar{x} + n_y \bar{y})^2 = 0$, ecuación en la que las dos soluciones del contenido del paréntesis llevan a la misma solución, una recta radial centrada en el origen.

$$n_x \bar{x} + n_y \bar{y} = 0$$

Con un único punto se calcula la recta 2D. Asumiendo la condición ortonormal de \mathbf{n}

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$$

$$n_z = 0$$

$$n_x = \frac{-\bar{y}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

$$n_y = \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}}$$

Siguiendo este mismo criterio se puede realizar un ajuste condicionado por la calibración con mas puntos si se desea un resultado más preciso. El proceso consiste en calcular los coeficientes β_i para cada punto, que aportan n ecuaciones al sistema lineal

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & -\frac{1}{\beta_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n & y_n & -\frac{1}{\beta_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

que puede ser resuelto por descomposición en valores singulares (SVD).

4.1.3. Ajuste Robusto de Cónicas (RANSAC)

En la sección 4.1.2 se ha descrito el proceso por el cual, conociendo la calibración del sistema, se calcula la cónica que pasa por dos puntos, que está definida si es la proyección de un segmento recto de la escena. En esta sección se aplica en un método robusto, para extraer, a partir del conjunto de trazos conectados, el mayor número de cónicas correspondientes a segmentos rectos de la escena.

La ventaja principal del método RANSAC además de ser robusto a puntos espúreos es que puede detectar mas de una cónica en un trazo. De hecho se puede aplicar el método al conjunto de los puntos sin utilizar el agrupamiento por trazos conectados, a costa eso sí de un tiempo de cálculo muy elevado. El algoritmo RANSAC ajusta una serie aleatoria de elementos de nuestro conjunto de puntos a una figura geométrica determinada. En este caso, se quiere ajustar cónicas condicionadas definidas por dos puntos.

1. Entre los puntos del trazo se seleccionan dos al azar y se calcula la cónica que pasa por los dos puntos.
2. A continuación, se calcula la distancia de todos los puntos del trazo a la cónica ajustada. Los puntos cuya distancia es menor a un umbral dado aportan un voto a la cónica ajustada. Este proceso se repite un número de veces

determinado estadísticamente y se selecciona la cónica que más votos ha recibido.

Aplicando de nuevo el método a los puntos que no han votado a la cónica elegida se puede detectar una nueva cónica. El proceso se para cuando la relación entre el número de puntos sobre el que se va a detectar una nueva cónica y el número de puntos total es menor que un umbral dado.

La efectividad de este método depende del algoritmo para ajustar las cónicas y de la selección entre los puntos que pertenecen a la cónica y los que no.

Distancia de un punto a una cónica

La distancia de un punto a una cónica no es a priori un cálculo trivial. En el caso que se aborda en esta sección la distancia de un punto a una cónica es un método que discrimina los puntos que pertenecen a la cónica de los que no. El algoritmo utilizado se ha de aplicar a la totalidad de los puntos detectados por Canny en cada uno de los intentos del bucle de RANSAC.

Ante la necesidad de un algoritmo rápido y el uso que se va a dar a éste, se ha implementado una aproximación a la distancia entre punto y cónica. Los requisitos de esta aproximación es que se aproxime bien a la distancia real en el rango del umbral de selección y que sea monótona creciente. A continuación se muestran varias alternativas y la solución empleada.

Distancia Algebraica

La ecuación de pertenencia de un punto a una cónica tiene la forma

$$c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0 \quad (4.15)$$

Se define la distancia algebraica como $d_{\text{alg}} = c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6$. Esta función es cero cuando el punto pertenece a la cónica y va creciendo a medida que el punto se aleja de la cónica. La principal ventaja de esta expresión es que su cómputo es muy rápido, además x_{lift} se puede calcular previamente al RANSAC.

$$d_{\text{alg}} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \\ y^2 \\ x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{c}'\mathbf{x}_{\text{lift}}$$

La principal desventaja es que la magnitud resultante no es en píxeles lo que hace difícil fijar un umbral de selección. Además su aproximación a la distancia varía dependiendo del tipo de cónica, haciendo necesario calcular un umbral para cada cónica. Además, la cónica que separa las zonas de pertenencia y no pertenencia $c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 - d_{\text{umbral}} = 0$ no se haya a una distancia uniforme de la cónica.

Distancia basada en el Gradiente.

Sea, \mathbf{x}_0 un punto ajeno a la cónica, \mathbf{x}_c un punto perteneciente a la cónica (definida por la ecuación $c_1x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6 = 0$) y d_{alg} la distancia algebraica definida anteriormente que representa a una familia de cónicas concéntricas, se define el vector gradiente de d_{alg} al vector $\vec{\nabla}d_{\text{alg}} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right)^T$, de dirección perpendicular a la familia de curvas y magnitud igual a la variación de esta distancia en esta dirección.

$$\vec{\nabla}d_{\text{alg}} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} 2c_1x + c_2y + c_4 \\ c_2x + 2c_3y + c_5 \end{array} \right)$$

A partir de esta función vectorial se define al vector $\hat{\mathbf{n}}$ como el vector normal a la familia de cónicas en el plano.

$$\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \frac{\nabla d_{\text{alg}}}{\|\nabla d_{\text{alg}}\|}$$

La ecuación paramétrica de la recta perpendicular a la cónica en el punto perteneciente a la cónica x_c queda definida por $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{x}_c + \lambda \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_c)$. En este enfoque se plantea una aproximación a esta recta dada por $\mathbf{r}_{\text{aprox}} = \mathbf{x}_0 + \lambda \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$ dado que $\hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_c) = \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) \approx \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_0)$.

El procedimiento consiste en calcular la recta perpendicular aproximada, calcular la intersección de ésta con la cónica y una vez determinado el punto $\mathbf{x}_{\text{c}_{\text{aprox}}}$ calcular la distancia entre ambos.

Para ello se substituye en la ecuación 4.15 la ecuación de la recta aproximada:

$$x_{\text{c}_{\text{aprox}}} = x_0 + \lambda_{\text{aprox}} n_x(\mathbf{x}_0)$$

$$y_{\text{c}_{\text{aprox}}} = y_0 + \lambda_{\text{aprox}} n_y(\mathbf{x}_0)$$

$$x_{\text{c}_{\text{aprox}}}^2 = x_0^2 + 2\lambda_{\text{aprox}} n_x + \lambda_{\text{aprox}}^2 n_x^2 \quad y_{\text{c}_{\text{aprox}}}^2 = y_0^2 + 2\lambda_{\text{aprox}} n_y + \lambda_{\text{aprox}}^2 n_y^2$$

$$\begin{aligned}
x_{c_{aprox}} y_{c_{aprox}} &= x_0 y_0 + x_0 \lambda_{aprox} n_y + y_0 \lambda_{aprox} n_x + \lambda_{aprox}^2 n_x n_y \\
\lambda_{aprox}^2 \underbrace{(c_1 n_x^2 + c_2 n_x n_y + c_3 n_y^2)}_{coef_a} &+ \lambda_{aprox} \underbrace{(2c_1 n_x + 2c_3 n_y + c_2 (x_0 n_y + y_0 n_x))}_{coef_b} + \dots \\
&+ \underbrace{c_1 x_0^2 + c_2 x_0 y_0 + c_3 y_0^2 + c_4 x_0 + c_5 y_0 + c_6}_{coef_c} = 0
\end{aligned}$$

donde λ es la solución a una ecuación de segundo grado

$$\lambda_{aprox} = \frac{-coef_b \pm \sqrt{coef_b^2 - 4coef_a coef_c}}{2coef_a}$$

De manera que cada solución es una de las dos intersecciones de la recta con la cónica.

Obsérvese que el sumando independiente $coef_c$ es la distancia algebraica que se ha descrito anteriormente y que λ es igual a menos la distancia del punto \mathbf{x}_0 a los dos puntos intersección.

Si se observa la ecuación a partir de la cual se calcula lambda $\lambda_{aprox}^2 coef_a + \lambda_{aprox} coef_b + d_{alg} = 0$ se puede despreciar el término cuadrático para obtener una aproximación lineal de la distancia.

$$\lambda_{lineal} coef_b + d_{alg} = 0 \quad \lambda_{lineal} = -\frac{d_{alg}}{coef_b}$$

$$\mathbf{x}_{lineal} - \mathbf{x}_0 = \lambda_{lineal} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_c)$$

$$d_{lineal} = \|\mathbf{x}_{lineal} - \mathbf{x}_0\| = \|\lambda_{lineal} \hat{\mathbf{n}}(\mathbf{x}_c)\| = |\lambda_{lineal}| = \left| \frac{d_{alg}}{coef_b} \right|$$

En la práctica se ha visto que esta distancia aproxima muy bien al problema de pertenencia o no a la cónica que se quiere resolver.

El algoritmo utilizado utiliza una combinación de distancias para determinar la pertenencia a la cónica de los puntos.

1. Calcula el umbral algebraico para la cónica a partir de un umbral en píxeles.
2. Se calcula para cada punto la distancia algebraica y se compara con el umbral. Si es mayor que el umbral, el punto se descarta en caso contrario se pasa al siguiente nivel.

3. Se calcula la distancia lineal y se vuelve a comparar con el umbral en píxeles. Los puntos que se encuentran fuera de la franja se descartan.
4. Se calcula la distancia basada en la recta pseudo-perpendicular. Los puntos que cumplen esta condición y las anteriores emiten un voto positivo.

Este planteamiento hace que para la mayoría de los puntos solo se calcule la distancia algebraica que resulta muy barata en cálculo. En la práctica, con un umbral de dos píxeles, y utilizando una primera criba con la distancia algebraica y utilizando además la distancia lineal se consiguen buenos resultados.

4.2. Cálculo del Punto de Fuga de Rectas Verticales

Una vez que se tiene una descripción analítica de las proyecciones de los trazos rectos se puede proceder al análisis de los puntos de fuga de estas cónicas.

El punto de fuga de cada par de segmentos rectos de la escena, es un punto proyectado en la imagen, que tiene la característica de ser la intersección de las cónicas que definen la proyección. Este punto codifica información sobre la orientación de ambas rectas.

Partiendo del supuesto de que las direcciones predominantes de los segmentos rectos en la escena son la dirección vertical y horizontal, existirán dos puntos para cada configuración (horizontal y vertical) a la que fugaran la mayoría de las cónicas. El objetivo de esta sección es identificar estos puntos de fuga mayoritarios, y de entre éstos, aquellos que pertenecen a la orientación vertical que es la orientación que se toma como referencia.

4.2.1. Sistema de Referencia Utilizado

La orientación de referencia es la orientación vertical. En esta situación la proyección de todas las rectas verticales de la escena están representadas por cónicas degeneradas a rectas en la imagen que intersectan en un punto de fuga en el centro de la imagen o punto principal. El resto de rectas de la escena se proyectan como cónicas intersectando en diversos puntos de fuga.

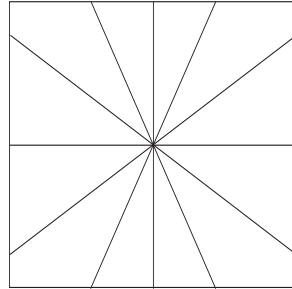


Figura 4.1: Las rectas verticales se proyectan en rectas radiales que fugan al punto principal

Si la cámara gira un ángulo ψ alrededor del eje vertical el conjunto de las rectas verticales gira alrededor del punto principal un ángulo igual a menos ψ con un cambio de orientación dado por el efecto del espejo.²

La orientación de cada recta vertical respecto de los ejes queda determinada por el ángulo θ . Esta configuración es muy utilizada en aplicaciones de SLAM, o de localización por búsqueda de imágenes, debido a que se restringe los grados de libertad a la posición y un giro. Además, como se describe en el anexo D.2, esta configuración degenerada no depende de la calibración de los parámetros del espejo lo que hace posible utilizar el sistema sin calibración.

Tomando la orientación vertical como referencia y rotando la cámara alrededor del eje X, se observa que los segmentos rectos de la escena que corresponden a rectas verticales ya no se proyectan en rectas radiales sino que se proyectan en cónicas. El punto de fuga de todas ellas se ha desplazado del punto principal.

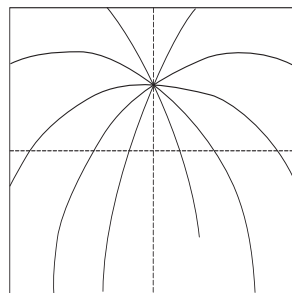


Figura 4.2: Las rectas verticales se proyectan en cónicas y el punto de fuga se ha desplazado

La distancia de este punto de fuga respecto del punto principal está relacionada con el ángulo de giro ϕ mientras que el ángulo alrededor del punto principal

²Ver anexo D.2

está relacionado con el ángulo de giro ψ .

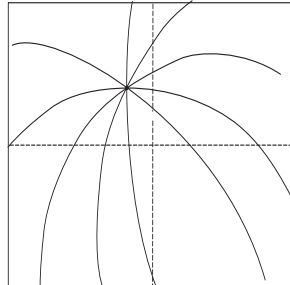


Figura 4.3: Las rectas verticales se proyectan en cónicas y el punto de fuga se ha desplazado y ha rotado

Por lo tanto, identificando el punto de fuga común a las proyecciones de las rectas verticales, se puede calcular la orientación de la cámara definida a través de los ángulos ϕ y ψ .

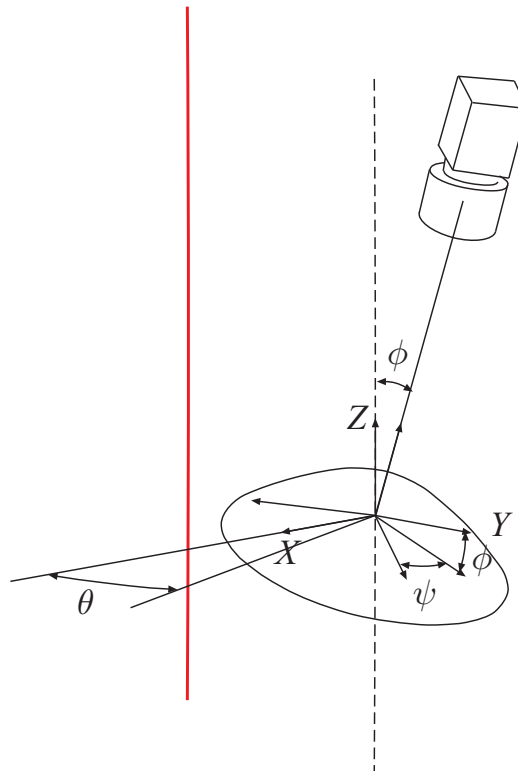


Figura 4.4: Ángulos que definen la orientación de la cámara y recta vertical

Como referencia absoluta se elige la orientación vertical que se ha descrito. En esta referencia se puede expresar una recta vertical en forma paramétrica en función de un ángulo θ que define la orientación del plano que une esta recta vertical con el origen del sistema catadióptrico central.

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{v}\lambda = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda$$

siendo el vector ortonormal al plano

$$\mathbf{n}_{vert} = \frac{\mathbf{X}_0 \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{X}_0\| \|\mathbf{v}\|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

La orientación de la cámara se puede definir con dos ángulos ϕ y ψ . Para trabajar con estos ángulos se va a definir una transformación T que define la referencia absoluta vista desde la referencia de la cámara en función de los ángulos ϕ alrededor del eje X y ψ alrededor del eje Z de la cámara. La cámara es la referencia 0 y la referencia absoluta absoluta es la referencia 2.

$${}_0T^1 = rot_z(\psi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad {}_1T^2 = rot_x(\phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$${}_0T^2 = rot_z(\psi) rot_x(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \psi & -\cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \psi \\ \sin \psi & \cos \phi \cos \psi & -\sin \phi \cos \psi \\ 0 & \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{cam} = {}_0T^2 \mathbf{x}_{abs}$$

Se puede definir la transformación inversa correspondiente a la transformación que va de la referencia absoluta a la cámara.

$${}_2T^0 = ({}_0T^2)^t = rot_x(\phi)^t rot_z(\psi)^t = \begin{pmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\cos \phi \sin \psi & \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \\ \sin \phi \sin \psi & -\sin \phi \cos \psi & \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_{abs} = {}_2T^0 \mathbf{x}_{cam}$$

Con estas transformaciones se puede expresar a través del vector \mathbf{n} una recta que es vertical en el sistema de referencia absoluto en el sistema de referencia de

la cámara.

$$\mathbf{n} = {}_0\mathbf{T}^2\mathbf{n}_{\text{vert}} = \begin{pmatrix} \cos \psi \sin \theta + \cos \phi \sin \psi \cos \theta \\ \sin \psi \sin \theta - \cos \phi \cos \psi \cos \theta \\ -\sin \phi \cos \theta \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

Esta expresión se utiliza más adelante para relacionar la norma del punto de fuga con el ángulo ϕ .

4.2.2. Intersección de Cónicas

Considérense las cónicas Ω_1 y Ω_2 pintadas en la figura 4.5. Dos curvas cónicas intersectan en cuatro puntos \mathbf{P}^{++} , \mathbf{P}^{+-} , \mathbf{P}^{-+} y \mathbf{P}^{--} . En esta sección se presenta el algoritmo basado en geometría proyectiva presentado por Barreto en [10] así como la variación realizada para el caso singular de intersección de dos cónicas en dos puntos cuando estas cónicas son proyección de rectas del espacio.

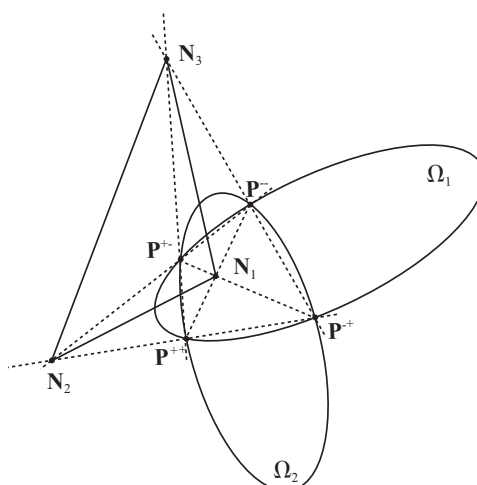


Figura 4.5: Intersección de dos cónicas en cuatro puntos y el triángulo autopolar

El Triángulo Autopolar Común a un Dos Cónicas

La ecuación 4.17 define una familia de curvas cónicas $\Omega(\lambda)$. La familia de cónicas es la serie infinita de curvas cónicas $\Omega(\lambda)$; combinación lineal de la base de cónicas Ω_1 y Ω_2 . Nótese que si \mathbf{P} es un punto común a ambas Ω_1 y Ω_2 ($\mathbf{P}^T\Omega_1\mathbf{P} = 0$ y $\mathbf{P}^T\Omega_2\mathbf{P} = 0$), entonces \mathbf{P} pertenece a $\Omega(\lambda)$ para cualquier valor de λ ($\mathbf{P}^T\Omega(\lambda)\mathbf{P} = 0$). Un par de curvas cónicas siempre intersectan entre sí en cuatro puntos que pueden ser reales o complejos, distintos o coincidentes. La fa-

milia de cónicas determinada por Ω_1 y Ω_2 es simplemente el sistema de todas las cónicas que atraviesan los cuatro puntos comunes a Ω_1 y Ω_2 .

$$\Omega(\lambda) = \Omega_1 + \lambda\Omega_2 \quad (4.17)$$

Los puntos \mathbf{P}^{++} , \mathbf{P}^{+-} , \mathbf{P}^{-+} y \mathbf{P}^{--} definen un cuadrilátero. Los lados del cuadrilátero intersectan respectivamente en \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_2 y \mathbf{N}_3 que son los vértices del triángulo autopolar para todas las cónicas de la familia. Ésto significa que el par de vértices $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2)$, $(\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_3)$ y $(\mathbf{N}_2, \mathbf{N}_3)$ son conjugados respecto de todas las cónicas $\Omega(\lambda)$. Se cumple que

$$\mathbf{N}_1^T \Omega(\lambda) \mathbf{N}_2 = 0 \quad (4.18)$$

$$\mathbf{N}_1^T \Omega(\lambda) \mathbf{N}_3 = 0 \quad (4.19)$$

$$\mathbf{N}_2^T \Omega(\lambda) \mathbf{N}_3 = 0 \quad (4.20)$$

En general cuatro puntos definen tres pares distintos de rectas. El punto \mathbf{N}_1 está definido como intersección de las rectas definidas por \mathbf{P}^{++} , \mathbf{P}^{--} y \mathbf{P}^{+-} , \mathbf{P}^{-+} respectivamente. El punto \mathbf{N}_2 está definido como la intersección de las rectas definidas por \mathbf{P}^{--} , \mathbf{P}^{+-} y \mathbf{P}^{-+} , \mathbf{P}^{++} respectivamente. El punto \mathbf{N}_3 está definido como la intersección de las rectas definidas por \mathbf{P}^{-+} , \mathbf{P}^{--} y \mathbf{P}^{++} , \mathbf{P}^{+-} respectivamente.

Estos pares de rectas pueden ser descritos como cónicas degeneradas que a su vez pertenecen al conjunto de cónicas $\Omega(\lambda)$. El rango de una cónica degenerada formada por dos rectas es de un orden menor al máximo lo que significa que

$$\det(\Omega_1 + \lambda\Omega_2) = 0 \quad (4.21)$$

Se puede demostrar que la solución de esa ecuación es un polinomio de tercer grado del tipo

$$coef_a \lambda^3 + coef_b \lambda^2 + coef_c \lambda + coef_d = 0 \quad (4.22)$$

Si la solución de este polinomio son tres raíces reales nos hallamos con el caso expuesto de intersección de dos cónicas en cuatro puntos. Para cada λ queda definida una cónica cuyo espacio nulo es el punto \mathbf{N} correspondiente.

$$\Omega_a = \Omega(\lambda_1)$$

$$\Omega_b = \Omega(\lambda_2)$$

$$\Omega_c = \Omega(\lambda_3)$$

Si la solución obtenida es una raíz real y dos raíces complejas las dos cónicas intersectan en dos puntos. En este caso sólo se puede obtener un punto \mathbf{N} real como espacio nulo de $\Omega(\lambda_{\text{real}})$.

Cálculo de la Intersección de Dos Cónicas

Usando el Triángulo Autopolar. Caso General

Los puntos \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_2 y \mathbf{N}_3 son los vértices del triángulo autopolar asociado a la familia de cónicas $\Omega(\lambda)$. Si los elementos de la familia de cónicas $\Omega(\lambda)$ intersectan en cuatro puntos, entonces los vértices \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_2 y \mathbf{N}_3 no son colineales. Cualquier punto del plano proyectivo P^2 se puede escribir como una combinación lineal de tres puntos no colineales por lo que, escogiendo $\mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2$ y \mathbf{N}_3 como base, cualquier punto del plano proyectivo se puede expresar como

$$\mathbf{P}(\varphi, \theta) = \mathbf{N}_1 + \varphi \mathbf{N}_2 + \theta \mathbf{N}_3 \quad (4.23)$$

Sustituyendo \mathbf{P} en las ecuaciones de las cónicas Ω_1 y Ω_2 y teniendo en cuenta que \mathbf{N}_1 , \mathbf{N}_2 y \mathbf{N}_3 son puntos conjugados respecto de ambas cónicas se llega al siguiente sistema de ecuaciones.

$$\mathbf{P}(\varphi, \theta)^T \Omega_1 \mathbf{P}(\varphi, \theta) = 0 \quad (4.24)$$

$$\mathbf{P}(\varphi, \theta)^T \Omega_2 \mathbf{P}(\varphi, \theta) = 0 \quad (4.25)$$

$$\mathbf{N}_1^T \Omega_1 \mathbf{N}_1 + \varphi^2 \mathbf{N}_2^T \Omega_1 \mathbf{N}_2 + \theta^2 \mathbf{N}_3^T \Omega_1 \mathbf{N}_3 = 0 \quad (4.26)$$

$$\mathbf{N}_1^T \Omega_2 \mathbf{N}_1 + \varphi^2 \mathbf{N}_2^T \Omega_2 \mathbf{N}_2 + \theta^2 \mathbf{N}_3^T \Omega_2 \mathbf{N}_3 = 0 \quad (4.27)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones se llega a

$$\varphi^\pm = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{N}_1^T \Omega_1 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_3^T \Omega_2 \mathbf{N}_3 - \mathbf{N}_1^T \Omega_2 \mathbf{N}_1 \mathbf{N}_3^T \Omega_1 \mathbf{N}_3}{\mathbf{N}_3^T \Omega_1 \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_2^T \Omega_2 \mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_3^T \Omega_2 \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_2^T \Omega_1 \mathbf{N}_2}} \quad (4.28)$$

$$\theta^\pm = \pm \sqrt{\frac{\mathbf{N}_2^T \Omega_1 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1^T \Omega_2 \mathbf{N}_1 - \mathbf{N}_2^T \Omega_2 \mathbf{N}_2 \mathbf{N}_1^T \Omega_1 \mathbf{N}_1}{\mathbf{N}_3^T \Omega_1 \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_2^T \Omega_2 \mathbf{N}_2 - \mathbf{N}_3^T \Omega_2 \mathbf{N}_3 \mathbf{N}_2^T \Omega_1 \mathbf{N}_2}} \quad (4.29)$$

Los puntos de intersección son $\mathbf{P}^{++} = \mathbf{P}(\varphi^+, \theta^+)$, $\mathbf{P}^{+-} = \mathbf{P}(\varphi^+, \theta^-)$, $\mathbf{P}^{-+} = \mathbf{P}(\varphi^-, \theta^+)$ y $\mathbf{P}^{--} = \mathbf{P}(\varphi^-, \theta^-)$

Cálculo de la Intersección de Dos Proyecciones de Rectas de la Escena Usando el Triángulo Autopolar

El caso particular que se trata en este apartado aborda el problema de la intersección de dos cónicas cuando éstas son la proyección de una recta de la escena. El caso general expuesto en la sección anterior y desarrollado ampliamente por Barreto [10] asume que las cónicas intersectan en cuatro puntos. En el caso particular que se trata en este proyecto las cónicas intersectan en 2 puntos haciendo inviable el método anterior. Sin embargo profundizando en la configuración degenerada se ha llegado a una solución a este problema.

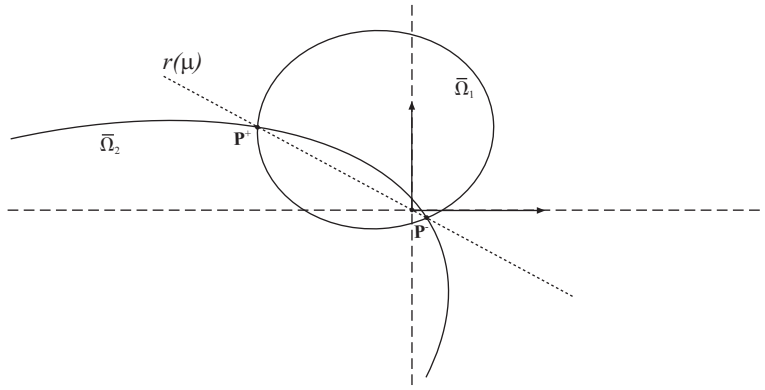


Figura 4.6: Intersección de la proyección de dos rectas del espacio en dos puntos en el n-plano

Sean \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 dos vectores cada uno de ellos normal al plano formado por la recta del espacio correspondiente y el origen del sistema catadióptrico central y $\bar{\Omega}_1$ y $\bar{\Omega}_2$ la representación en el n-plano de las proyecciones de estas rectas en forma de cónica.

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} n_{x_1} \\ n_{y_1} \\ n_{z_1} \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} n_{x_2} \\ n_{y_2} \\ n_{z_2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\Omega}_1 \bar{\mathbf{x}} = 0$$

$$\bar{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} n_{x_1}^2 (1 - \xi^2) - n_{z_1}^2 \xi^2 & n_{x_1} n_{y_1} (1 - \xi^2) & n_{x_1} n_{z_1} \\ n_{x_1} n_{y_1} (1 - \xi^2) & n_{y_1}^2 (1 - \xi^2) - n_{z_1}^2 \xi^2 & n_{y_1} n_{z_1} \\ n_{x_1} n_{z_1} & n_{y_1} n_{z_1} & n_{z_1}^2 \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

$$\bar{\mathbf{x}}^T \bar{\Omega}_2 \bar{\mathbf{x}} = 0$$

$$\bar{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} n_{x_2}^2 (1 - \xi^2) - n_{z_2}^2 \xi^2 & n_{x_2} n_{y_2} (1 - \xi^2) & n_{x_2} n_{z_2} \\ n_{x_2} n_{y_2} (1 - \xi^2) & n_{y_2}^2 (1 - \xi^2) - n_{z_2}^2 \xi^2 & n_{y_2} n_{z_2} \\ n_{x_2} n_{z_2} & n_{y_2} n_{z_2} & n_{z_2}^2 \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

Los vértices del triángulo autopolar asociado a la familia de cónicas $\bar{\Omega}(\lambda) = \bar{\Omega}_1 + \lambda \bar{\Omega}_2$ cumplen la condición de cónica degenerada

$$\det(\bar{\Omega}_1 + \lambda \bar{\Omega}_2) = 0$$

que es una ecuación polinómica de tercer grado del tipo.

$$coef_a \lambda^3 + coef_b \lambda^2 + coef_c \lambda + coef_d = 0$$

Si se calculan las raíces de esta ecuación de forma analítica con un software de cálculo simbólico se llega a un resultado en la que una de las soluciones es real y las otras dos complejas conjugadas. Esta situación es una configuración degenerada del problema de intersección de dos cónicas en la que las dos cónicas intersecan únicamente en dos puntos.

$$\lambda_1 = -\frac{n_{z_1}^2}{n_{z_2}^2} \quad \lambda_2 = f(n_1, n_2) \quad \lambda_3 = \text{con.j}(\lambda_2)$$

El espacio nulo de $\bar{\Omega}(\lambda_1) = \bar{\Omega}_1 + \lambda \bar{\Omega}_2$ es una cónica degenerada a recta que pasa por el origen y que pasa por los puntos en los que las dos cónicas intersecan.

$$(n_{z_2}^2 n_{x_1} n_{z_1} - n_{z_1}^2 n_{x_2} n_{z_2}) x + (n_{z_2}^2 n_{y_1} n_{z_1} - n_{z_1}^2 n_{y_2} n_{z_2}) y = 0 \quad (4.32)$$

Expresada en forma paramétrica esta recta queda expresada como:

$$r(\mu) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \mu = \begin{pmatrix} n_{z_2}^2 n_{y_1} n_{z_1} - n_{z_1}^2 n_{y_2} n_{z_2} \\ n_{z_1}^2 n_{x_2} n_{z_2} - n_{z_2}^2 n_{x_1} n_{z_1} \end{pmatrix} \mu$$

La intersección de esta recta con la ecuación de cualquiera de las dos cónicas da como resultado dos puntos que son los dos puntos de fuga buscados. La solución a esa intersección pasa por resolver el polinomio de segundo grado donde c_i son los coeficientes de la ecuación de cualquiera de las dos cónicas:

$$\mu^2 (c_1 v_x^2 + c_2 v_x v_y + c_3 v_y^2) + \mu (c_4 v_x + c_5 v_y) + c_6 = 0$$

4.2.3. Identificación del Punto de Fuga de Rectas Verticales

En la sección 4.2.2 se ha descrito el cálculo de la intersección de dos cónicas que son imagen proyectada de dos rectas del espacio. Para identificar el punto de fuga de las rectas verticales se parte del conjunto de intersecciones de cada par de cónicas.

El ángulo ϕ entre el eje vertical de la escena Z y la referencia Z' de la cámara se va a limitar a un ángulo máximo de 85° . Se asume esta situación porque, en ambientes hechos por el hombre, la mayoría de los segmentos rectos detectados son verticales u horizontales. Un ángulo de 90° o más hace converger la solución del problema hacia rectas horizontales.

En la práctica esta limitación angular supone excluir del cálculo a los puntos de fuga cuya distancia al punto principal de la imagen sea superior a un umbral calculado a partir del ángulo límite.³ Estos puntos de fuga excluidos corresponden a los puntos de fuga de las rectas horizontales.

Tras esta selección previa cada punto de fuga va a ser votado por el resto según un umbral de distancia. Dado que la mayoría de las rectas van a ser verticales y van a fugar a un único punto, se asume que el mas votado es el punto de fuga buscado.

4.3. Cálculo de la Orientación de la Cámara

Una vez estimado el punto de fuga de las rectas verticales expresado en coordenadas polares $\bar{\mathbf{x}}_{fuga} = (\rho_{fuga} \ \theta_{fuga})$ se puede estimar la orientación en el sistema de referencia. Debido a la simetría de revolución del espejo el ángulo de giro ψ alrededor del eje vertical de la cámara coincide con menos el ángulo del punto de fuga⁴.

$$\psi = -\theta_{fuga} \quad (4.33)$$

El signo negativo se debe a la imagen simétrica producida por cualquier espejo.

El ángulo ϕ está relacionado con la norma del punto de fuga según la expresión

³La relación entre las coordenadas polares de un punto de fuga y la orientación de la cámara se describe en la sección 4.3

⁴Ver el anexo D

que se plantea a continuación.

Relación entre el ángulo ϕ y la norma del punto de fuga vertical

En la sección 4.2.2 se ha descrito el cálculo de intersección de dos cónicas que son proyección de rectas en el espacio. Se presenta como resultado una recta en forma paramétrica que pasa por el origen de coordenadas en el plano normalizado (n-plano) y cuya intersección con cualquiera de las dos cónicas $\bar{\Omega}_1$ y $\bar{\Omega}_2$ son los dos puntos de intersección entre las dos cónicas.

$$r(\mu) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \mu = \begin{pmatrix} n_{z_2}^2 n_{y_1} n_{z_1} - n_{z_1}^2 n_{y_2} n_{z_2} \\ n_{z_1}^2 n_{x_2} n_{z_2} - n_{z_2}^2 n_{x_1} n_{z_1} \end{pmatrix} \mu$$

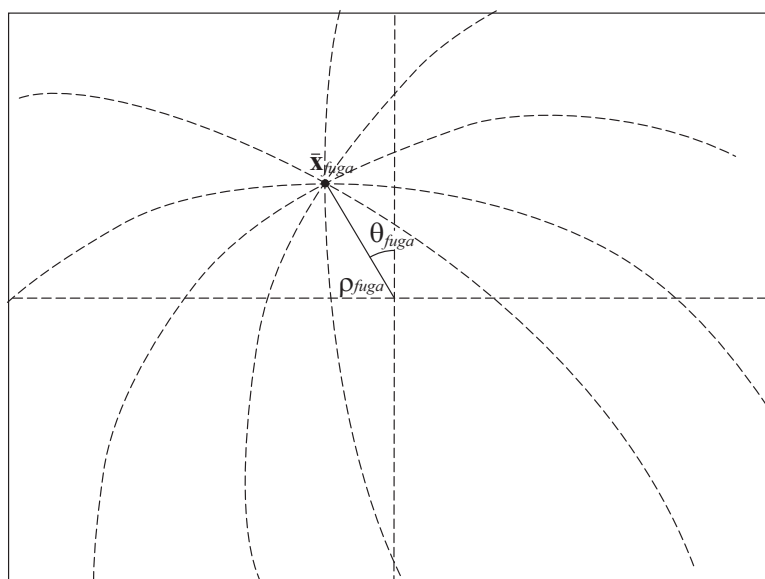


Figura 4.7: Definición polar del punto de fuga

Se plantea ahora esta ecuación paramétrica para el caso de dos rectas verticales descritas por las normales a los planos formados por las rectas y el origen \mathbf{n}_1 y \mathbf{n}_2 . Estas dos rectas se van a describir según el criterio de ángulos de la sección 4.2.1 y dado que las rotaciones ϕ y ψ están desacopladas y sólo interesa el cálculo de ϕ (ψ es directamente menos el ángulo polar del punto de fuga) se va a asumir que $\psi = 0$.

La expresión entonces para una recta vertical definida por el ángulo θ que se ha rotado un ángulo ϕ alrededor del eje X es:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \phi \cos \theta \\ -\sin \phi \cos \theta \end{pmatrix}$$

Si se toman dos rectas verticales cualesquiera definidas por los ángulos θ_1 y θ_2

$$\mathbf{n}_1 = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \phi \cos \theta_1 \\ -\sin \phi \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \begin{pmatrix} \sin \theta_2 \\ -\cos \phi \cos \theta_2 \\ -\sin \phi \cos \theta_2 \end{pmatrix}$$

A partir de este punto se utiliza S_{angulo} y C_{angulo} en sustitución de $\sin(\text{angulo})$ y $\cos(\text{angulo})$ como notación. la recta r queda descrita como

$$v_x = n_{z_2} n_{z_1} (n_{z_2} n_{y_1} - n_{z_1} n_{y_2}) = S_\phi^2 C_{\theta_1} C_{\theta_2} (S_\phi C_\phi C_{\theta_1} C_{\theta_2} - S_\phi C_\phi C_{\theta_1} C_{\theta_2}) = 0$$

$$v_y = S_\phi^3 C_{\theta_1} C_{\theta_2} (C_{\theta_2} S_{\theta_1} - C_{\theta_1} S_{\theta_2})$$

$$r(\mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ S_\phi^3 C_{\theta_1} C_{\theta_2} (C_{\theta_2} S_{\theta_1} - C_{\theta_1} S_{\theta_2}) \end{pmatrix} \mu \quad (4.34)$$

La recta r solo tiene componente en Y porque se ha supuesto que $\psi = 0$. La expresión de la cónica 1 expresada en el n -plano es:

$$(1 - \xi^2) (S_{\theta_1} \bar{x} - C_\phi C_{\theta_1} \bar{y})^2 - 2S_\phi C_{\theta_1} (S_{\theta_1} \bar{x} - C_\phi C_{\theta_1} \bar{y}) + S_\phi^2 C_{\theta_1}^2 (1 - \xi^2 (\bar{x}^2 + \bar{y}^2)) = 0$$

Sustituyendo r en la cónica y agrupando en función de μ queda una expresión polinómica de segundo grado

$$\text{coef}_a \mu^2 + \text{coef}_b \mu + \text{coef}_c = 0$$

$$\text{coef}_a = S_\phi^6 C_{\theta_1}^4 C_{\theta_2}^2 (C_{\theta_2} S_{\theta_1} - C_{\theta_1} S_{\theta_2})^2 (C_\phi^2 - \xi^2)$$

$$\text{coef}_b = 2S_\phi^4 C_{\theta_1}^3 C_{\theta_2} C_\phi (C_{\theta_2} S_{\theta_1} - C_{\theta_1} S_{\theta_2})$$

$$\text{coef}_c = S_\phi^2 C_{\theta_1}^2$$

Resolviendo la ecuación de segundo grado mediante la solución analítica se calculan los dos valores de la variable paramétrica μ .

$$\mu = \frac{-C_\phi \pm \xi}{S_\phi^2 C_{\theta_1} C_{\theta_2} (C_{\theta_2} S_{\theta_1} - C_{\theta_1} S_{\theta_2}) (C_\phi^2 - \xi^2)}$$

Sustituyendo estos valores en 4.34 y teniendo en cuenta que sólo tiene componente en el eje X se llega a la siguiente expresión para la distancia del punto de fuga al origen.

$$\rho_{fuga} = \frac{S_\phi (-C_\phi \pm \xi)}{C_\phi^2 - \xi^2}$$

que simplificada se traduce en

$$\rho_{fuga} = \frac{-S_\phi}{C_\phi \pm \xi} \quad (4.35)$$

Esta expresión permite relacionar el ángulo ϕ con la norma del punto de fuga elegido.

En la práctica lo que se necesita es calcular el ángulo ϕ en función de ρ_{fuga} para lo cual se calcula una look-up table. El tamaño de esta tabla influye en la precisión del ángulo calculado pero permite separar el cálculo del bucle principal debido a que para su cálculo solo se necesita el parámetro ξ .

4.4. Rectificación de la Imagen

Una vez calculada la orientación del sistema de referencia respecto del sistema de la cámara se procede a realizar una rectificación de la imagen original. El objetivo es obtener una imagen equivalente a la que se obtendría si la cámara estuviese en posición vertical. Para ello se utiliza la transformación inversa definida en la sección 4.2.1.

Cada píxel de la imagen original lleva asociado un rayo según la proyección inversa del modelo de la esfera (sección 2). Si se rota este vector la transformación inversa ${}_2T^0$ que transforma cualquier vector en la referencia de la cámara en un vector en la referencia absoluta y después se proyecta se obtiene como resultado una imagen rectificadas. Para evitar huecos en la imagen resultante en la práctica el procedimiento es el contrario. Para cada píxel de la imagen de salida se calcula el rayo correspondiente, se rota a la referencia de la cámara con la transformación ${}_0T^2$ y se re proyecta para ver el tono del píxel de la imagen original que le correspondería.

ϕ	ψ	E_ϕ
4.2°	150.84°	4°
48.19°	-57.38°	1.75°
62.4436	-21,4357°	1.25
24.75°	160.18°	3.5°
47.87	-21.88	0.5°
19.72°	157.92°	1.5°
49.10°	164.91°	4.5°
65.15°	-71.24	1.25°
46.82°	-55.34°	1.75°

Tabla 4.1: Orientación y error angular

4.5. Experimentos

El algoritmo presentado en las secciones anteriores se ha desarrollado en un primer lugar en lenguaje de Matlab y posteriormente se ha ido traduciendo a C para Matlab poniendo especial énfasis en las secciones críticas. Los experimentos realizados consisten en la rectificación de una secuencia de imágenes tomadas con el sistema catadióptrico en el interior de un edificio. El algoritmo devuelve la orientación de la cámara respecto de la posición vertical y una imagen rectificada que se halla en configuración vertical.

En la tabla 4.1 se presentan los resultados de orientación para varias de las imágenes tomadas en una secuencia. Las imágenes han sido seleccionadas exclusivamente en función de la nitidez de la imagen influyendo únicamente en el proceso de extracción de contornos con Canny. En la tabla también se presenta una medida del error cometido en el cálculo que se comenta a continuación.

Partiendo de los contornos extraídos por Canny y de la matriz de rotación devuelta por el algoritmo se rotan los rayos que corresponden a cada punto hasta la situación referencia. En esta situación singular los trazos cónicos se han transformado en trazos rectos que intersectan en el punto principal.

Ajustando estos trazos a rectas y calculando la intersección de todas ellas se obtiene un punto de fuga. La distancia de este punto de fuga al punto principal es una medida del error cometido que se puede expresar en una medida angular a partir de la expresión 4.35 presentada en la sección 4.3.

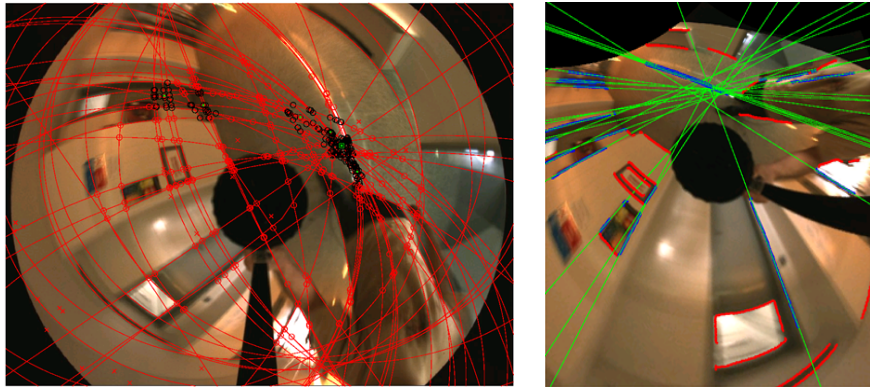


Figura 4.8: Estimación del punto de fuga y rectificación

En un muestreo de 10 imágenes la media del error cometido es de 2.07° con una desviación típica de 1.4° . No se observa una evolución del error en función del ángulo de inclinación ϕ .

Sección 5

Conclusiones

Para la realización de este proyecto se parte inicialmente de una serie de procedimientos para calibrar sistemas omnidireccionales descritos en [5, 6, 7, 8] y accesibles como OpenSource en forma de utilidades para Matlab. La implementación de la utilidad de reconstrucción basada en Structure from Motion plantea la dificultad de adaptar la información de calibración proporcionada por los distintos métodos analizados a un sistema referencia común y manteniendo los distintos modelos proyectivos. Se realiza una reconstrucción lineal y después se ajusta ese resultado con un procedimiento no lineal de ajuste fotogramétrico .

Como resultado del trabajo de comparación de metodos de calibración de cámaras se ha escrito un articulo de investigación, actualmente en proceso de revisión [12].

La comparativa plantea que todos los métodos permiten resultados de reconstrucción de precisión elevada si bien no siempre se dan las condiciones mas adecuadas para obtenerlos. Muchos de los métodos han sido desarrollados para sistemas paracatadióptricos y presentan problemas prácticos cuando se utilizan con espejos hiperbólicos. La utilidad que acompaña al método [5] por ejemplo incluye un extractor de puntos automático basado en la suposición de que el espejo es parabólico, que no funciona bien cuando la imagen del patrón de calibración se encuentra en la parte mas exterior del espejo. Es sin embargo esa zona, la que más influye a la hora de la posterior calibración no lineal invalidando los resultados. Para obtener los resultados de reconstrucción que se presentan en este documento se tuvo que modificar la utilidad desactivando el extractor automático e implementando uno manual.

Es importante resaltar que todos los métodos asumen que el sistema es cata-dióptrico central, situación que no es fácil de garantizar porque se desconoce la situación geométrica exacta del centro óptico de la cámara perspectiva. Para garantizar unos resultados buenos se realizo un procedimiento sencillo de ayuda al

posicionamiento del espejo que se presenta en el anexo J.

En la práctica un sistema omnidireccional de estas características necesita ser calibrado cada vez que se modifica la distancia focal. En este contexto el parámetro geométrico del espejo ξ necesita ser estimado una única vez, incluso es conocido si el fabricante del espejo adjunta en la documentación técnica los parámetros a y b de la hipérbola generatriz.

En [5, 6, 8] se optimizan la calibración con un proceso no lineal a partir de soluciones estimadas mediante procesos lineales. La influencia de la calidad de los datos de entrada en los resultados de la geometría del espejo es mayor de lo esperado, lo que obliga en ocasiones a repetir la calibración del sistema buscando un dato que en realidad ya se conoce. Se hecha en falta en estos métodos la posibilidad de introducir como semilla el parámetro geométrico ξ para realizar una calibración rápida en el contexto de un uso cotidiano del sistema en el que se da fácilmente un cambio de la distancia focal. Esto facilitaría asimismo el uso de los extractores automáticos haciendo aún más rápido el proceso.

La segunda parte del proyecto intenta aplicar el conocimiento de la calibración interna a la hora de calcular parámetros externos como la orientación. Los métodos de ajuste de cónicas que se toman como partida están enfocados a un uso de calibración interna (por ejemplo los presentados por Barreto en [10]) y se basan en ajustes de cónicas a partir de 5 puntos. La convergencia de estos métodos precisan de un arco de cónica muy amplio, situación que es difícil de conseguir en un proceso offline como es la calibración que presenta el método [7], se torna casi imposible en un proceso automático.

En este proyecto se aporta como novedad el método de ajuste de cónicas a partir de dos puntos basado en la calibración, deducido e implementado durante la realización del mismo. Este método posibilita la convergencia del ajuste así como una reducción del tiempo de cálculo que plantea la posibilidad de implementación del algoritmo completo en tiempo real. Este método sólo funciona con aquellas cónicas que son proyecciones de rectas de la escena (definidas en el espacio por dos puntos) donde la conicidad de la forma geométrica a detectar en la escena viene determinada por la calibración interna.

El algoritmo se realiza inicialmente en Matlab y posteriormente se traduce a C para Matlab optimizando las secciones críticas. En el algoritmo, que se presenta en el CD anexo, las funciones de C se han implementado pensadas para ser utilizadas directamente y posteriormente encapsuladas en funciones interfase entre C y Matlab .

Anexo A

Geometría de la Hipérbola

Un espejo hiperbólico es un hiperboloide de revolución. En este anexo se plantean las relaciones geométricas que definen una hipérbola y las propiedades y parámetros que resultan útiles en el estudio de un sistema hiper-catadióptrico central.

A.1. Definición Geométrica de Hipérbola

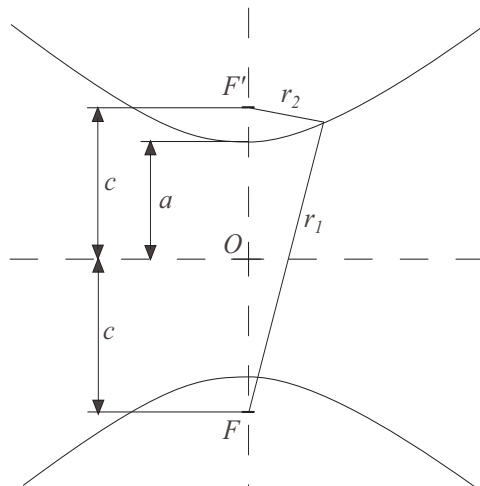


Figura A.1: Definición de la hipérbola

Una hipérbola es el lugar geométrico de los puntos tales que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es igual a una

constante positiva igual a la distancia entre los vértices.

$$r_1 - r_2 = k \quad k = cte \quad (\text{A.1})$$

A.2. Deducción de k

En el caso en que r_1 pasa por O e incide en el mínimo local de la cónica $r_2 = c - a$, $r_1 = c + a$, a partir de A.1 se deduce el valor de la constante k

$$k = r_1 - r_2 = (c + a) - (c - a) = c + a - c + a = 2a$$

A.3. Ecuación Explícita de la Hipérbola

La ecuación explícita de la hipérbola se deduce a partir de A.1 sustituyendo las distancias r_1 y r_2 por su expresión en coordenadas.

$$r_1 = \sqrt{R^2 + (Z + c)^2} \quad r_2 = \sqrt{R^2 + (Z - c)^2}$$

$$r_1 - r_2 = \sqrt{R^2 + (Z + c)^2} - \sqrt{R^2 + (Z - c)^2} = 2a$$

$$\sqrt{R^2 + (Z + c)^2} = 2a + \sqrt{R^2 + (Z - c)^2}$$

$$R^2 + Z^2 + 2cZ + c^2 = 4a^2 + R^2 + Z^2 - 2cZ + c^2 + 4a\sqrt{R^2 + (Z - c)^2}$$

$$4cZ - 4a^2 = 4a\sqrt{R^2 + (Z - c)^2}$$

$$\frac{cZ - a^2}{a} = \sqrt{R^2 + (Z - c)^2}$$

$$\frac{c^2 Z^2 - 2cZa^2 + a^4}{a^2} = R^2 + (Z - c)^2$$

$$c^2 Z^2 - 2cZa^2 + a^4 = a^2 R^2 + a^2 Z^2 + a^2 c^2 - 2cZa^2$$

$$(c^2 - a^2) Z^2 - a^2 R^2 + a^4 - a^2 c^2 = 0$$

$$(c^2 - a^2) Z^2 - a^2 R^2 - a^2 (c^2 - a^2) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Por analogía con la elipse se define el parámetro $b^2 = c^2 - a^2$ de manera que se puede expresar $c^2 = a^2 + b^2$.

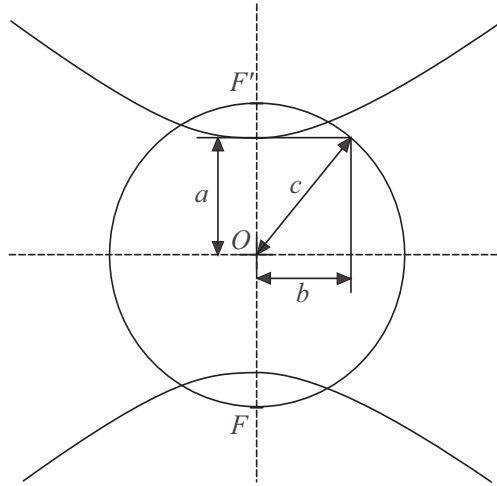


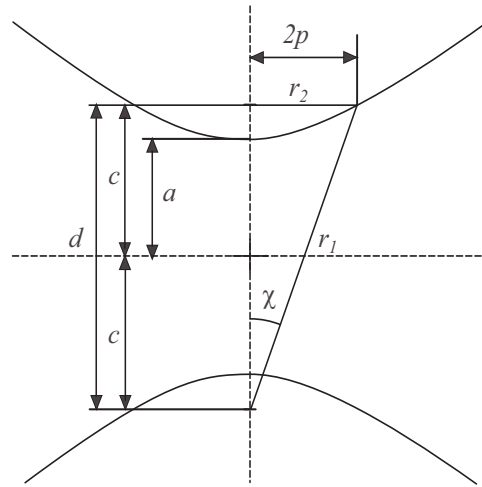
Figura A.2: Definición del parámetro b en la ecuación de la hipérbola

$$b^2 Z^2 - a^2 R^2 - a^2 b^2 = 0 \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{Z^2}{a^2} - \frac{R^2}{b^2} = 1 \quad (\text{A.4})$$

A.4. Definición de Semi-Latus-Rectum

En el caso en que el punto de la hipérbola donde inciden r_1 y r_2 tenga la altura del foco F' se llama semi-latus-rectum a la distancia de ese punto a la recta generatriz y se define a través del parámetro p de manera que $2p = \text{semilatusrectum}$. Se define la distancia entre focos $d = 2c$.

Figura A.3: Definición de los parámetros p y d

$$r_1 = \sqrt{d^2 + (2p)^2} = \sqrt{d^2 + 4p^2} \quad r_2 = 2p$$

$$k = 2a = r_1 - r_2 = \sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p$$

$$2a + 2p = \sqrt{d^2 + 4p^2}$$

$$4a^2 + 4p^2 + 8ap = d^2 + 4p^2$$

$$8ap = 4c^2 - 4a^2$$

$$p = \frac{c^2 - a^2}{2a} = \frac{b^2}{2a}$$

$$2p = \frac{b^2}{a}$$

a y b se expresan en función de d y p

$$k = 2a = r_1 - r_2 = \sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p$$

$$a = \frac{1}{2} \left(\sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p \right)$$

Excentricidad lineal	Semi latus-rectum	Distancia entre focos	$\cos(\chi)$	$\sin(\chi)$
$c = \sqrt{a^2 + b^2}$	$2p = \frac{b^2}{a}$	$d = 2c$	$\xi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4p^2}}$	$\eta = -\frac{2p}{\sqrt{d^2 + 4p^2}}$

Tabla A.1: Parámetros de la hiperbola

Excentricidad	parámetro focal	Distancia de la directriz al origen
$\varepsilon = \frac{c}{a}$	$p_f = \frac{2p}{\varepsilon} = \frac{b^2}{c}$	$d_{OD} = \frac{a}{\varepsilon} = \frac{a^2}{c}$

Tabla A.2: Parámetros de la hipérbola 2

$$a^2 = \frac{1}{2} \left(d^2 + 8p^2 + 4p\sqrt{d^2 + 4p^2} \right)$$

$$c^2 = \frac{d^2}{4}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 = \frac{d^2}{4} - \frac{d^2}{4} - 2p^2 + p\sqrt{d^2 + 4p^2}$$

$$b = \sqrt{p\sqrt{d^2 + 4p^2} - 2p^2}$$

A continuación se definen geoméricamente dos parámetros que resultan de utilidad en el modelo de la esfera.

$$\xi = \frac{d}{\sqrt{d^2 + 4p^2}} = \cos \chi \tag{A.5}$$

$$\eta = -\frac{2p}{\sqrt{d^2 + 4p^2}} = -\sin \chi \tag{A.6}$$

La hipérbola se define también como el lugar geométrico de los puntos cuya distancia al foco l_1 y cuya distancia a la directriz l_2 están relacionadas por la excentricidad.

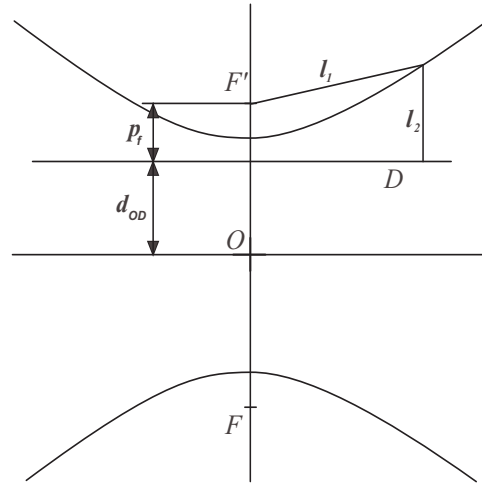


Figura A.4: Definición de la hipérbola a partir de la directriz

$$\frac{l_1}{l_2} = \varepsilon \quad l_1 = \varepsilon \cdot l_2$$

$$\sqrt{R^2 + (Z - c)^2} = \frac{c}{a} \left(Z - \frac{a^2}{c} \right)$$

$$\sqrt{R^2 + (Z - c)^2} = \frac{c}{a} Z - a$$

$$R^2 + (Z - c)^2 = \frac{c^2}{a^2} Z^2 + a^2 - 2cZ$$

$$R^2 + Z^2 + c^2 - 2cZ = \frac{c^2}{a^2} Z^2 + a^2 - 2cZ$$

$$a^2 R^2 + a^2 Z^2 + a^2 (c^2 - a^2) = c^2 Z^2$$

$$Z^2 (c^2 - a^2) - a^2 R^2 - a^2 (c^2 - a^2) = 0$$

$$Z^2 b^2 - a^2 R^2 - a^2 b^2 = 0$$

$$\frac{Z^2}{a^2} - \frac{R^2}{b^2} = 1$$

Anexo B

El Sistema Hipercatadióptrico como SCC

En [1] Baker y Nayar demuestran que un sistema catadióptrico se comporta como central únicamente si el espejo tiene perfil hiperbólico, parabólico o elíptico.

Cada rayo que incide en la cámara perspectiva $r_{reflejado}$ está relacionado por la ley de Snell con un rayo que incide en el espejo $r_{incidente}$.

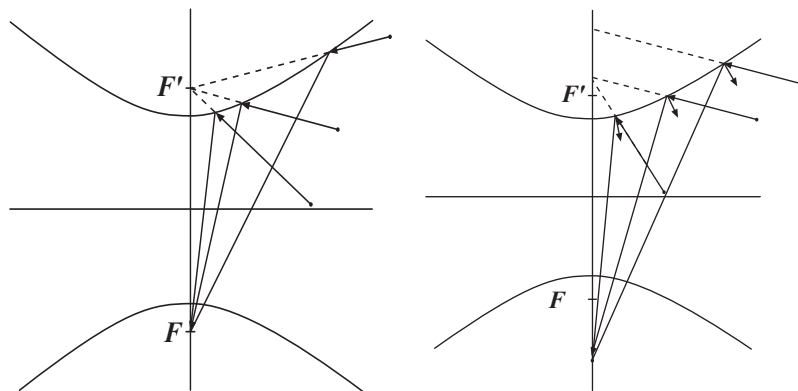


Figura B.1: En un SCC la proyección de los rayos incidentes pasa por un único punto F'

Se dice que un sistema catadióptrico es central si, para cada rayo reflejado, definido por el centro óptico de la cámara perspectiva C y un pixel del plano de proyección, existe un rayo incidente que pasa por un punto de la escena (el que se ve en el pixel) y por un punto definido como origen del sistema catadióptrico central O que es común para todos los rayos incidentes.

En este anexo se muestra cómo un sistema catadióptrico formado por espejo hiperbólico y cámara perspectiva se comporta como un sistema central si se sitúa el

la ecuación, $\tan(2\beta) = \tan(\alpha - \theta)$ y se utiliza la propiedad geométrica de las tangentes, $\tan(A \pm B) = \frac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$ la ecuación queda como

$$\frac{2 \tan \beta}{1 - \tan^2 \beta} = \frac{\tan \alpha - \tan \theta}{1 + \tan \alpha \tan \theta} \quad (\text{B.2})$$

La ecuación B.2, que es la ecuación presentada por Baker y Nayar en [1], es general y a partir un vector gradiente genérico define una ecuación diferencial cuya solución es múltiple y define los perfiles de los espejos hiperbólico, elíptico y parabólico.

En este anexo se presenta la solución particular que corresponde a un espejo hiperbólico.

A partir del gradiente de ecuación explícita del espejo en coordenadas polares con origen en O se puede obtener la expresión del vector normal.

$$\begin{aligned} \frac{(z - c)^2}{a^2} - \frac{(r^2)}{b^2} &= 1 \\ -a^2 r^2 + b^2 z^2 - 2cb^2 z + b^4 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

$$f(r, z) = -a^2 r^2 + b^2 z^2 - 2cb^2 z + b^4$$

$$\nabla f(r, z) = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial r} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} -2a^2 r \\ 2b^2 (z - c) \end{array} \right)$$

$$\mathbf{n} = \left(\begin{array}{c} 2a^2 r \\ -2b^2 (z - c) \end{array} \right)$$

Conocido \mathbf{n} en función de r y z se sustituye en la ecuación B.2 el valor de los ángulos buscando que se cumpla la ecuación del espejo.

$$\tan \beta = \frac{n_r}{n_z} = \frac{2a^2 r}{-2b^2 (z - c)} = -\frac{a^2}{b^2} \frac{r}{(z - c)} = \frac{a^2}{b^2} \frac{r}{(c - z)}$$

$$\frac{2 \frac{a^2}{b^2} \frac{r}{(c - z)}}{1 - \left(\frac{a^2}{b^2} \frac{r}{(c - z)} \right)^2} = \frac{(2c - 2z) r}{r^2 + 2cz - z^2}$$

$$2 \frac{a^2}{b^2} \frac{r}{(c - z)} (r^2 + 2cz - z^2) = (2c - 2z) r - (2c - 2z) r \left(\frac{a^2}{b^2} \frac{r}{(c - z)} \right)^2$$

$$2\frac{a^2}{b^2}(r^2 + 2cz - z^2) = 2(c - z)^2 - 2(c - z)^2 \left(\frac{a^2}{b^2} \frac{r}{c - z} \right)^2$$

$$2a^2(r^2 + 2cz - z^2) = 2b^2(c - z)^2 - 2\frac{a^4}{b^2}r^2$$

$$2a^2(2cz - z^2) = 2b^2(c - z)^2 - 2a^2r^2 \left(\frac{a^2}{b^2} + 1 \right)$$

$$2a^2b^2(2cz - z^2) = 2b^2b^2(c - z)^2 - 2a^2r^2(a^2 + b^2)$$

$$0 = 2b^2(b^2c^2 + b^2z^2 - 2zcb^2 - 2cza^2 + a^2z^2) - 2a^2r^2(a^2 + b^2)$$

$$0 = 2b^2(b^2c^2 + c^2z^2 - 2zc^3) - 2a^2r^2c^2$$

$$0 = 2b^2(b^2 + z^2 - 2zc) - 2a^2r^2$$

llegando a

$$-a^2r^2 + b^2z^2 - 2cb^2z + b^4 = 0$$

que es la ecuación del espejo B.3. Este desarrollo demuestra que se cumple la condición de sistema catadioptrico central impuesta a través de la definición de θ , partiendo de la ley de Snell en B.1 y la condición geométrica de que la cámara se encuentre a una distancia $2c$ del origen, y de que el perfil del espejo sea hiperbólico.

Anexo C

Modelo de Proyección para un SCC Hiperbólico

En el anexo B se ha demostrado que un sistema hipercatadióptrico cumple la condición de sistema catadioptrico central. Por otro lado en la sección 2 se ha presentado un modelo de proyección abstracto que engloba a los sistemas catadioptricos centrales en base a unos parámetros geométricos que para el caso de espejo hiperbólico pueden ser identificados geoméricamente en el Anexo A. En el presente anexo se va a exponer la proyección de un punto de la escena en una imagen omnidireccional generada con un sistema hipercatadióptrico y se va a comparar este resultado con el obtenido según el modelo de la esfera mostrando la analogía entre ambos modelos.

La condición de sistema catadióptrico central afirma que debido al perfil hiperbólico del espejo, el rayo reflejado definido por el centro óptico de la cámara perspectiva C y un punto del plano proyectivo \mathbf{x}_{p_1} es el reflejo de un rayo incidente, que queda definido por el punto de escena X que se observa en la imagen y el origen del sistema catadioptrico O .

Esta condición define un método para proyectar el punto X en la imagen omnidireccional.¹

1. Cálculo del rayo incidente r_{inc} a partir del punto 3D de la escena y el origen del sistema catadióptrico O .
2. Cálculo de los puntos x'_1 y x'_2 mediante la intersección de r_{inc} con la superficie

¹Nótese que en caso de no darse la esta condición puede establecerse una relación entre el rayo incidente (que ya no pasa por O) y un pixel de la pantalla pero un punto de la escena no puede proyectarse porque solo se conoce uno de los puntos que definen el rayo incidente.

del espejo.

3. Proyección de los puntos x'_1 y x'_2 sobre el plano de proyección de la cámara perspectiva a través del centro óptico C .

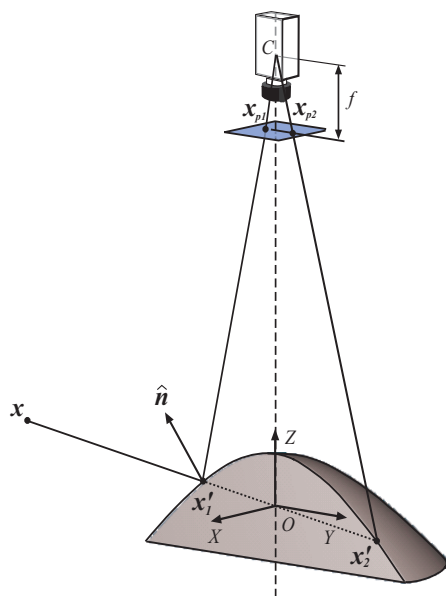


Figura C.1: Proyección de un punto de la escena en la imagen a partir de la reflexión en el espejo hiperbólico

Este método calcula la proyección de un punto de la escena en dos puntos en la imagen de los que solo uno es ópticamente coherente. Una de las soluciones genera la imagen real en la que se distingue el efecto de simetría que se da en cualquier espejo. La solución no coherente genera una imagen irreal sin el efecto de simetría.

C.1. Proyección de un Punto sobre el Hiperboloide de Revolución

El punto de la escena en coordenadas homogéneas X es transformado al sistema de referencia del SCC mediante la matriz proyectiva P_{SCC} .

$$\mathbf{x} = P_{\text{SCC}}\mathbf{X}$$

$$P_{\text{SCC}} = R_{\text{SCC}} (|C_{\text{SCC}})$$

Partiendo de la ecuación del hiperboloide de revolución con origen en $O \frac{(z-c)^2}{a^2} - \frac{(x^2+y^2)}{b^2} = 1$ se desarrolla para llegar a una expresión homogénea.

$$-a^2x^2 - a^2y^2 + b^2z^2 - 2cb^2z + b^4 = 0$$

Modelando el rayo incidente como una recta paramétrica centrada en el origen O la intersección del rayo con la recta \mathbf{x}' puede expresarse como $\mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}$.

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Se sustituye la expresión paramétrica de la recta en la ecuación del hiperboloide de revolución y se calculan λ_1 y λ_2 parámetros que definen los puntos \mathbf{x}'_1 y \mathbf{x}'_2 .

$$-a^2x'^2 - a^2y'^2 + b^2z'^2 - 2cb^2z' + b^4 = 0$$

$$(b^2z^2 - a^2(x^2 + y^2)) \lambda^2 - 2zcb^2\lambda + b^4 = 0$$

$$\lambda = \frac{2zcb^2 \pm \sqrt{4z^2c^2b^4 - 4b^4b^2z^2 + 4b^4a^2(x^2 + y^2)}}{2(b^2z^2 - a^2(x^2 + y^2))}$$

$$\lambda = \frac{2zcb^2 \pm 2b^2\sqrt{z^2c^2 - b^2z^2 + a^2(x^2 + y^2)}}{2(b^2z^2 - a^2(x^2 + y^2))}$$

$$\lambda = \frac{2zcb^2 \pm 2b^2\sqrt{z^2(c^2 - b^2) + a^2(x^2 + y^2)}}{2(b^2z^2 - a^2(x^2 + y^2))}$$

$$\lambda = \frac{zcb^2 \pm b^2a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{b^2z^2 - a^2(x^2 + y^2)}$$

$$\lambda = \frac{zcb^2 \pm b^2a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{b^2z^2 - a^2(x^2 + y^2 + z^2) + a^2z^2}$$

$$\lambda = \frac{zcb^2 \pm b^2a\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{c^2z^2 - a^2(x^2 + y^2 + z^2)}$$

definiendo $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\lambda = \frac{zcb^2 \pm b^2a\rho}{c^2z^2 - a^2\rho^2}$$

$$c^2z^2 - a^2\rho^2 = (zc + a\rho)(zc - a\rho)$$

$$\lambda = \frac{b^2(zc \pm a\rho)}{(zc + a\rho)(zc - a\rho)}$$

$$\lambda = \frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} \quad (\text{C.1})$$

El par de puntos x'_1 y x'_2 quedan definidos como

$$\mathbf{x}' = \frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} \mathbf{x}$$

C.2. Proyección de \mathbf{x}' en la Cámara Perspectiva

La cámara perspectiva está localizada a una distancia $d = 2c$ del origen y rotada respecto de la referencia base 180° en el eje X . Se define la cámara perspectiva a través de la matriz de proyección \mathbf{P} que proyecta los puntos en la imagen.

$$\mathbf{P} = \underbrace{\begin{pmatrix} f_x & s_{skew} & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}_c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{K}_c (\mathbf{R} \ \mathbf{t})$$

$$\mathbf{R} = \text{rot}_x(\pi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ d \end{pmatrix}$$

Se va a expresar a partir de ahora el punto \mathbf{x}' en coordenadas homogéneas. La proyección de este punto en la imagen en coordenadas homogéneas $\hat{\mathbf{x}}$ puede expresarse de la manera siguiente.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_c \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

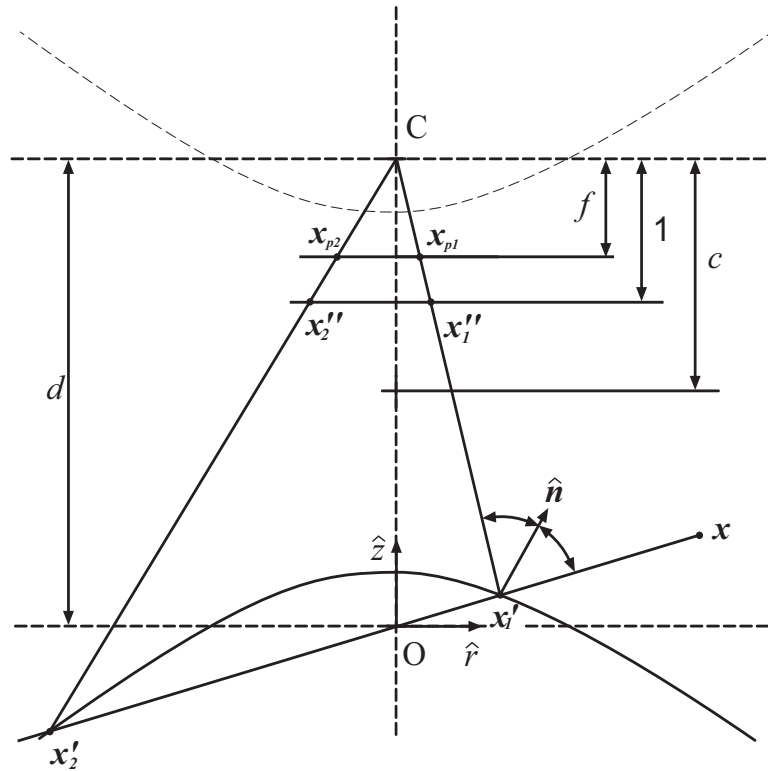


Figura C.2: Proyección de un punto en el plano normalizado a distancia 1

Se define el punto \mathbf{x}'' como el punto \mathbf{x}' proyectado en coordenadas homogéneas sobre un plano normalizado situado a una distancia unidad del origen del centro óptico. Este paso intermedio se realiza para desacoplar la matriz de calibración de la cámara proyectiva del resultado. Obsérvese que es el resultado de aplicar la matriz de proyección sin tener en cuenta \mathbf{K}_c por lo que

$$\mathbf{x}'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_c \mathbf{x}''$$

$$x'' = x' = \lambda x = \frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} x$$

$$y'' = -y' = -\lambda y = -\frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} y$$

$$z'' = -z' + d = -\lambda z + d = -\frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} z + d$$

Como \mathbf{x}'' es un vector en coordenadas homogéneas, multiplicado por cualquier factor de escala representa al mismo punto.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}'' &= \left(\frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} x \quad -\frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} y \quad -\frac{b^2}{(zc \mp a\rho)} z + d \right)^T = \\ &= a \left(\frac{\frac{b^2}{a}}{(z \frac{c}{a} \mp \rho)} x \quad -\frac{\frac{b^2}{a}}{(z \frac{c}{a} \mp \rho)} y \quad -\frac{\frac{b^2}{a} z + d(z \frac{c}{a} \mp \rho)}{(z \frac{c}{a} \mp \rho)} \right)^T = \\ &= \frac{a}{(z \frac{c}{a} \mp \rho)} \left(\frac{b^2}{a} x \quad -\frac{b^2}{a} y \quad -\left(\frac{b^2}{a} z + d(z \frac{c}{a} \mp \rho) \right) \right)^T \\ \mathbf{x}'' &= \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{z} \frac{c}{a} \mp \rho)} \left(\frac{b^2}{a} x \quad -\frac{b^2}{a} y \quad z \left(\frac{-b^2 + dc}{a} \right) \pm d\rho \right)^T \\ \mathbf{x}'' &= \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{z} \frac{c}{a} \mp \rho)} \left(\frac{b^2}{a} x \quad -\frac{b^2}{a} y \quad z \left(\frac{-c^2 + a^2 + 2c^2}{a} \right) \pm d\rho \right)^T \\ \mathbf{x}'' &= \frac{\mathbf{a}}{(\mathbf{z} \frac{c}{a} \mp \rho)} \left(\frac{b^2}{a} x \quad -\frac{b^2}{a} y \quad z \left(\frac{c^2 + a^2}{a} \right) \pm d\rho \right)^T \\ \mathbf{x}'' &= \frac{\mathbf{a} \left(\frac{c^2 + a^2}{a} \right)}{(\mathbf{z} \frac{c}{a} \mp \rho)} \left(\frac{\frac{b^2}{a}}{\left(\frac{c^2 + a^2}{a} \right)} x \quad -\frac{\frac{b^2}{a}}{\left(\frac{c^2 + a^2}{a} \right)} y \quad z \pm \frac{d}{\left(\frac{c^2 + a^2}{a} \right)} \rho \right)^T \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

La definición de la hipérbola cuando el punto está a la altura del latus-rectum es $2a = r_1 - r_2 = \sqrt{4p^2 + d^2} - 2p$ ²

Se opera y se llega a la siguiente relación

$$\sqrt{4p^2 + d^2} = 2a + 2p = 2a + \frac{b^2}{a} = \frac{2a^2 + c^2 - a^2}{a} = \frac{a^2 + c^2}{a} \quad (\text{C.3})$$

²Ver Anexo A

por otro lado

$$2p = \frac{b^2}{a} \quad (C.4)$$

Se sustituye C.3 y C.4 en C.2 llegando a $\mathbf{x}'' \sim \left(\frac{2p}{\sqrt{4p^2+d^2}}x \quad -\frac{2p}{\sqrt{4p^2+d^2}}y \quad z \pm \frac{d}{\sqrt{4p^2+d^2}}\rho \right)^T$ en el que se identifican los parámetros definidos en el Anexo A y característicos del modelo de la esfera.

$$\mathbf{x}'' \sim \left(-\eta x \quad \eta y \quad z \pm \xi \rho \right)^T \quad (C.5)$$

El modelo proyectivo completo es análogo al modelo de la esfera presentado en la sección 2.

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{K}_c \begin{pmatrix} -\eta & 0 & 0 \\ 0 & \eta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \pm \xi \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \end{pmatrix} \quad (C.6)$$

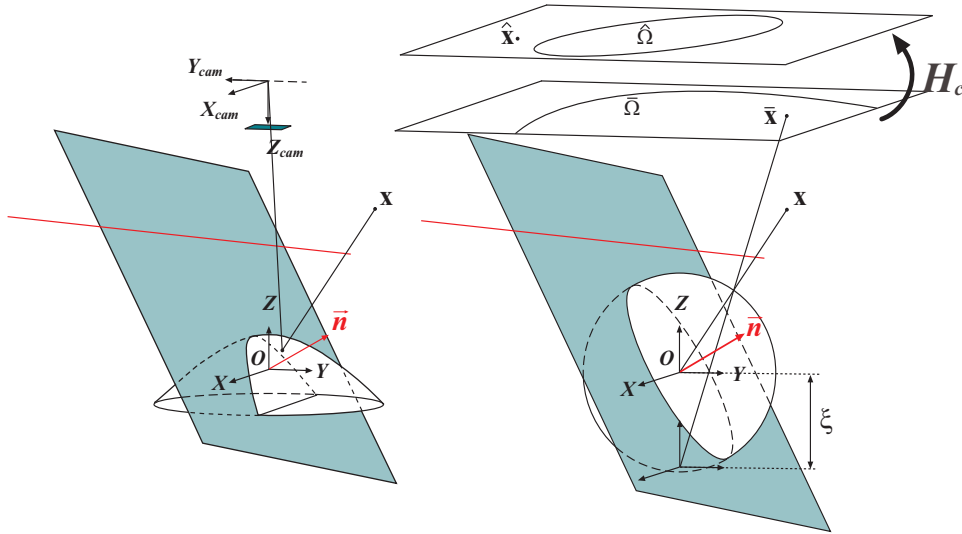


Figura C.3: Referencias tomadas para el modelo de la esfera y el modelo de proyección de espejo hiperbólico

Anexo D

Formas Geométricas Independientes de la Calibración

Los casos que se exponen a continuación describen situaciones en las que el sistema catadióptrico puede ser usado sin calibración previa. Evidentemente esta afirmación solo se puede realizar bajo ciertas aproximaciones que en la realidad nunca se cumplen completamente. Se utiliza el modelo de la esfera presentado en la sección 2. y se asume que no existe distorsión radial ni tangencial en la cámara proyectiva, que no hay 'skew' y el píxel es cuadrado.

D.1. Simetría de Revolución

En un sistema catadióptrico central basado en espejo hiperbólico o parabólico existe simetría de revolución respecto del eje Z. Se van a expresar en forma cilíndrica las coordenadas de un punto de la escena en el sistema de referencia del SSC.

Se parte de un vector \mathbf{x} de tres coordenadas tras la rotación y traslación que plantea la ecuación 2.1 donde cuatro coordenadas homogéneas se han proyectado a tres en el plano proyectivo P^2 . A pesar de trabajar en el plano proyectivo P^2 imaginarse la equivalencia de estas tres coordenadas en el espacio euclídeo puede ayudar a visualizar la solución.

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z \end{pmatrix}$$

Se proyecta sobre el n-plano mediante la función no lineal \bar{h} .

$$\bar{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ z + \xi \sqrt{r^2 + z^2} \end{pmatrix}$$

Aplicando la transformación \mathbf{H}_c para el caso expuesto anteriormente y expresando las coordenadas de la imagen u y v en forma polar se llega a la expresión polar de la proyección.

$$\mathbf{H}_c = \begin{pmatrix} -\eta f & 0 & u_0 \\ 0 & \eta f & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} -f\eta r \cos \theta + u_0 \\ f\eta r \sin \theta + v_0 \\ z + \xi \sqrt{r^2 + z^2} \end{pmatrix}$$

$$u = \frac{\hat{x}}{\hat{z}} = -\frac{f\eta r \cos \theta}{z + \xi \sqrt{r^2 + z^2}} + u_0 = r_p \cos \theta_p + u_0$$

$$v = \frac{\hat{y}}{\hat{z}} = \frac{f\eta r \sin \theta}{z + \xi \sqrt{r^2 + z^2}} + v_0 = r_p \sin \theta_p + v_0$$

$$\tan \theta_p = \frac{v - v_0}{u - u_0} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = -\tan \theta$$

$$\tan \theta_p = -\tan \theta$$

$$\theta_p = -\theta \tag{D.1}$$

La simetría de revolución del espejo hace que la coordenada θ se conserve. En caso de no cumplirse la aproximación de píxel cuadrado y ausencia de distorsión ya no se cumple sin embargo esta relación angular se sigue cumpliendo en el n-plano.

La expresión del radio sí depende de la calibración y queda expresada como:

$$r_p = \frac{\eta r f}{z + \xi \sqrt{r^2 + z^2}} \tag{D.2}$$

D.2. Rectas Verticales

Según el modelo de la esfera la proyección de una recta es una cónica que se puede expresar en modo matricial a partir del plano definido por la recta y el origen del sistema catadióptrico central $\Pi = (n_x \ n_y \ n_z \ 0)^T$

En la imagen se cumple que $\hat{\mathbf{x}}^T \hat{\Omega} \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$ siendo $\hat{\Omega} = \mathbf{H}_c^{-T} \bar{\Omega} \mathbf{H}_c^{-1}$ y $\hat{\mathbf{x}}$ las coordenadas homogéneas en la pantalla.

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} n_x^2(1-\xi^2) - n_z^2\xi^2 & n_x n_y(1-\xi^2) & n_x n_z \\ n_x n_y(1-\xi^2) & n_y^2(1-\xi^2) - n_z^2\xi^2 & n_y n_z \\ n_x n_z & n_y n_z & n_z^2 \end{pmatrix}$$

Las rectas verticales se expresan paramétricamente como

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{v}\lambda = \begin{pmatrix} r \cos \theta \\ r \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \lambda$$

se calcula el vector unitario normal al plano Π

$$\hat{n}_{vert} = \frac{\mathbf{X}_0 \times \mathbf{v}}{\|\mathbf{X}_0\| \|\mathbf{v}\|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se sustituye el vector normal en la expresión matricial de la cónica en el plano normalizado (n-plano) y se observa que la cónica resultante es una cónica degenerada definida por dos rectas (Ver Anexo I).

$$\bar{\Omega} = \begin{pmatrix} \sin^2 \theta (1 - \xi^2) & -\sin \theta \cos \theta (1 - \xi^2) & 0 \\ -\sin \theta \cos \theta (1 - \xi^2) & \cos^2 \theta (1 - \xi^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La expresión de la cónica degenerada en el n-plano puede simplificarse y se observa que las dos rectas de la cónica degenerada son la misma: una recta radial centrada en el origen.

$$(1 - \xi^2) (\sin^2 \theta \bar{x}^2 - 2 \sin \theta \cos \theta \bar{x}\bar{y} + \cos^2 \theta \bar{y}^2) = 0$$

$$(1 - \xi^2) (\sin \theta \bar{x} - \cos \theta \bar{y})^2 = 0$$

Si $\xi \neq 1$ en el caso de espejo hiperbólico

$$(\sin \theta \bar{x} - \cos \theta \bar{y})^2 = 0$$

$$\sin \theta \bar{x} - \cos \theta \bar{y} = 0$$

$$\bar{\mathbf{l}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \mathbf{H}_c^{-T} \bar{\mathbf{I}}$$

$$\mathbf{H}_c^{-T} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta f} & 0 \\ \frac{1}{\eta f} u_0 & -\frac{1}{\eta f} v_0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\eta f} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\eta f} & 0 \\ \frac{1}{\eta f} u_0 & -\frac{1}{\eta f} v_0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \\ -\cos \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \theta}{\eta f} \\ -\frac{\cos \theta}{\eta f} \\ \frac{\sin \theta}{\eta f} u_0 + \frac{\cos \theta}{\eta f} v_0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{I}}^t \hat{\mathbf{x}} = 0$$

$$\hat{l}_1 \hat{x} + \hat{l}_2 \hat{y} + \hat{l}_3 \hat{z} = 0$$

se asume que z distinto de cero y η distinto de cero

$$\hat{l}_1 \frac{\hat{x}}{\hat{z}} + \hat{l}_2 \frac{\hat{y}}{\hat{z}} + \hat{l}_3 = \hat{l}_1 u + \hat{l}_2 v + \hat{l}_3 = -\frac{\sin \theta}{\eta f} u - \frac{\cos \theta}{\eta f} v + \left(\frac{\sin \theta}{\eta f} u_0 + \frac{\cos \theta}{\eta f} v_0 \right) = 0$$

$$-\sin \theta u - \cos \theta v + (u_0 \sin \theta + v_0 \cos \theta) = 0$$

que es una recta centrada en el punto principal y radial.

$$-\sin \theta (u - u_0) - \cos \theta (v - v_0) = 0$$

$$-\frac{(u - u_0)}{\cos \theta} = \frac{(v - v_0)}{\sin \theta} = \lambda$$

$$u = u_0 - \cos \theta \lambda$$

$$v = v_0 + \sin \theta \lambda$$

Anexo E

Enfoque Esfera-Patron2D

El enfoque propuesto por Mei Rives [5] usa el modelo de la esfera expuesto en la sección 2, con la diferencia de que no tiene en cuenta la inversión simétrica de la imagen inducida por $(\psi - \xi)$ que resulta de ver la imagen en un espejo. Este enfoque añade al modelo, parámetros de distorsión radial y tangencial para considerar las no linealidades que en la realidad se dan en la cámara perspectiva. Este método es multivista, por lo que necesita varias imágenes del mismo patrón en las que se vean el mayor número de puntos posible.

Se requiere del usuario cierta información previa para inicializar ciertos parámetros. Uno de estos parámetros es el punto principal que es calculado a partir del centro y el borde interior del espejo.

También se requieren tres o mas puntos no radiales para calcular la inicialización de la distancia focal del sistema catadióptrico. Una vez que los parámetros intrínsecos y extrínsecos han sido inicializados un proceso no lineal (Levenberg-Marquardt) es lanzado. Este enfoque es válido igualmente para lentes de ojo de pez y espejos esféricos.

E.1. Modelo de Proyección

El autor lista 17 parámetros involucrados en la proyección de un puntos 3D \mathbf{X} en un punto la imagen $\mathbf{x} = (x \ y)$. Estos parámetros están organizados en vectores y denotados por transformaciones como sigue:

1. (P₁) Parámetros extrínsecos. $V^1 = [q_1 \ q_2 \ q_3 \ q_4 \ t_1 \ t_2 \ t_3]$. Los parámetros q_i representan la orientación del sistema respecto del mundo descrita como un cuaternión. t_i es un vector de posición.

2. (P₂).Transformación del espejo $V^2 = [\xi]$. Corresponde con la función no lineal 2.4 del modelo de la esfera.
3. (P₂).Distorsión $V^3 = [k_1 \ k_2 \ k_3 \ p_1 \ p_2]$ Estos parámetros modelan la distorsión radial y tangencial que se da en las cámaras perspectivas. Estas distorsiones se aplican antes de la colineación inducida por $\psi - \xi$.
4. (P₃).Modelo de la cámara. $V^4 = [\alpha \ \gamma_1 \ \gamma_2 \ u_0 \ v_0]$ donde γ_1 y γ_2 son la distancia focal de la cámara virtual $\gamma = f\eta$, α es un parámetro que describe el 'skew' ($s_{skew} = \alpha\gamma$); u_0 y v_0 son las coordenadas del punto principal.

E.2. Ecuación Final

Siendo G la combinación de las distintas funciones y V los 17 parámetros que describen la calibración intrínseca y extrínseca la transformación queda como:

$$G = P_1 \circ P_2 \circ P_3 \circ P_4 \quad (E.1)$$

$$V = [V^1 \ V^2 \ V^3 \ V^4] \quad (E.2)$$

Si el patrón usado para calibrar la cámara esta compuesto de m puntos X_i , que están asociados a los puntos de la imagen ,la solución del problema de calibración puede ser resulta minimizando la distancia euclidea entre la proyección el patrón y los valores extraídos de la imagen. Esta función de coste es la siguiente:

$$F(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m [G(V, \mathbf{X}_i) - \mathbf{x}_i]^2 \quad (E.3)$$

La minimización de esta función es calculada según una variación del algoritmo de Levenberg-Marquardt. Como semilla inicial del proceso no lineal, se utilizan una serie de información que se pide al usuario así como una serie de aproximaciones basadas en la naturaleza del sistema. Se asume que los errores de distorsión son pequeños y que el tamaño de píxel es uniforme, para inicializar los parámetros $k_1 = k_2 = k_3 = p_1 = p_2 = \alpha = 0$ y $\gamma_1 = \gamma_2$.

Como semilla para el punto principal u_0 y v_0 el interfaz gráfico pide al usuario una estimación del centro del espejo y del borde circular del espejo. Mediante un ajuste RANSAC calcula el centro del círculo como estimación mas fiable del punto principal. La distancia focal γ es estimada a partir de 3 puntos no radiales dados por el usuario partiendo del presupuesto de que $\xi = 1$.

E.3. Estimación de la Distancia Focal Generalizada

Con n puntos no radiales (en la practica, al menos 3) $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n$, definidos como $\mathbf{p}_c = \gamma \mathbf{x}$ contenidos en la proyección de una recta en la imagen, se verifica el sistema:

$$\mathbf{P}_{n \times 4} \mathbf{C}_{4 \times 1} = 0$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} u_{c1} & v_{c1} & \frac{1}{2} & -\frac{u_{c1}^2 + v_{c1}^2}{2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_{cn} & v_{cn} & \frac{1}{2} & -\frac{u_{cn}^2 + v_{cn}^2}{2} \end{pmatrix}$$

Mediante descomposición en valores singulares $\mathbf{P} = \mathbf{U}\mathbf{S}\mathbf{V}^T$, la solución por mínimos cuadrados se obtiene a partir de la última columna de \mathbf{V} asociada al mínimo valor singular. Se aplican los siguientes pasos para obtener \mathbf{N} y en particular γ a partir de $\mathbf{C} = (c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4)^T$

1. Cálculo de $t = c_1^2 + c_2^2 + c_3 c_4$ comprobando que $t > 0$.
2. $d = \sqrt{\frac{1}{t}}$ y $n_y = c_2 d$.
3. Comprobación de que $n_x^2 + n_y^2 > thresh$ para asegurar que la proyección de la recta no es una recta radial (configuración degenerada).
4. Finalmente, $\gamma = \frac{c_3}{n_z}$

Estos parámetros constituyen la semilla del proceso no lineal.

Anexo F

Enfoque Esfera-Rectas

Este método [7] propuesto por Barreto y Araujo está basado en la proyección de rectas en imágenes omnidireccionales. En un sistema catadióptrico central la imagen de una recta del espacio es una cónica. Por ello el primer paso consiste en ajustar las cónicas correspondientes a estas rectas. Se puede establecer una relación entre estas cónicas, el punto principal y otras entidades como las rectas polares, rectas del infinito y puntos circulares. De estas entidades se derivan una serie de propiedades invariantes de colinealidad, incidencia y ratio-cruzado. Estas propiedades son utilizadas para calcular la imagen de la cónica absoluta y el parámetro del espejo.

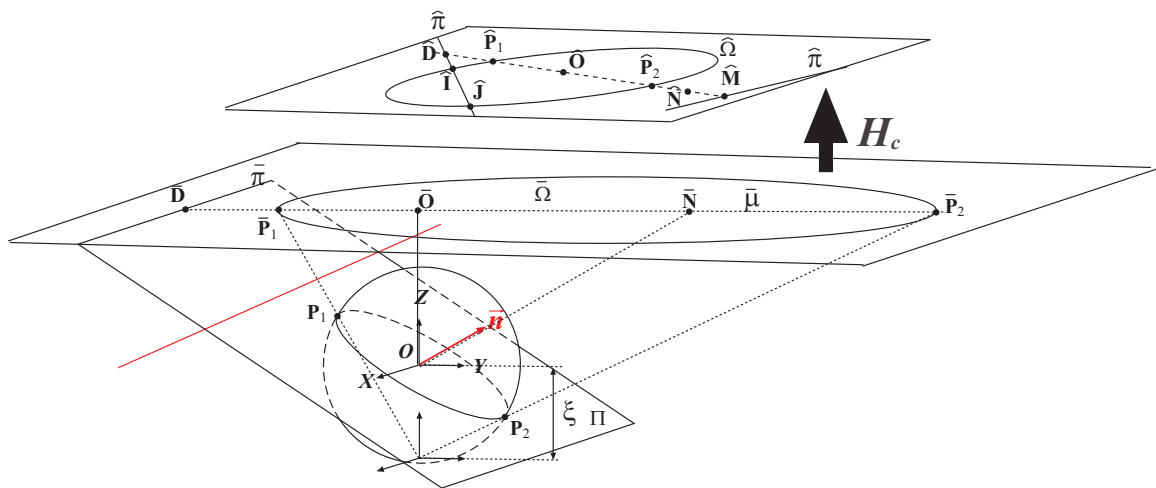


Figura F.1: Proyección catadióptrica central de una recta

F.1. Calibración del Sistema Catadióptrico Central

Para calibrar la cámara catadióptrica central se calcula la imagen de la cónica absoluta $\hat{\Omega}_\infty = H_c^{-T} H_c^{-1}$ y el parámetro del espejo ξ . Para calcular $\hat{\Omega}_\infty$ primero se necesita ($\hat{\pi} = \hat{\Omega} \hat{O}$) la recta polar del centro de la imagen \hat{O} respecto de la cónica $\hat{\Omega}$.

Esta recta intersecta $\hat{\Omega}$ en dos puntos \hat{I} y \hat{J} que están contenidos en la cónica absoluta. Al menos 5 de estos puntos son necesarios para calcular $\hat{\Omega}_\infty$. De cada proyección de una recta se obtienen 2 puntos, por lo que al menos se necesitan tres proyecciones de rectas para calcularla.

Una vez que la cónica absoluta es calculada H_c es determinada por descomposición de Cholesky de $\hat{\Omega}_\infty$. El cálculo del parámetro del espejo ξ se describe según los siguientes pasos:

1. Para cada par de cónicas $\hat{\Omega}_i$ y $\hat{\Omega}_j$, se determina la recta correspondiente que pasa a través de los polos de $\hat{\mu}_{ij}$ respecto de $\hat{\Omega}_i$ y $\hat{\Omega}_j$, $\hat{\mu}_{ij}$ intersecta con la recta $\hat{\pi}_\infty$.
2. Cada imagen de una recta $\hat{\Omega}_i$ tiene asociada una familia de rectas $\hat{\eta}_{ij}$. Se determina el punto \hat{N}_i como intersección de estas rectas.
3. Para cada proyección catadióptrica de la recta $\hat{\Omega}_i$ se determina la recta $\hat{\mu}_i = \hat{N}_i \wedge \hat{O}$.
4. Se estima la localización de la línea en el infinito $\hat{\pi}_\infty$ sabiendo que esta contiene a los polos de $\hat{\mu}_i$ respecto de la cónica $\hat{\Omega}_i$.
5. Para cada cónica $\hat{\Omega}_i$ se determina la intersección dada por $\hat{D}_i = \hat{\mu}_i \wedge \hat{\pi}_i$ y el polo $\hat{C}_i = \Omega_i^* \hat{\pi}_\infty$ que debe pertenecer a la recta $\hat{\mu}_i$.
6. El parámetro ξ se deduce a través de la expresión basada en el ratio cruzado $\xi = \sqrt{\{\hat{O}, \hat{D}_i, \hat{N}_i, \hat{C}_i\}}$.

Anexo G

Enfoque por Transformación Lineal Directa

Este enfoque [6] usa también el modelo de la esfera. Para tratar con las no-linealidades presentes en este modelo, se utiliza la extensión de vectores y matrices. En esta aproximación se utiliza una transformación lineal directa que se usa de semilla de una posterior optimización no lineal evitando la necesidad de información previa. Este método calcula una matriz de proyección extendida de 6×10 que es válida para cualquier sistema catadióptrico central.

Esta matriz se calcula a partir de las coordenadas extendidas de los puntos de la imagen y de los puntos 3D. La entrada requerida consiste en una única imagen con un mínimo de 20 correspondencias 2D/3D distribuidos en 3 planos diferentes. De esta matriz de proyección extendida se pueden extraer los parámetros intrínsecos y extrínsecos.

G.1. Modelo de Cámara

El modelo usado en este enfoque es igualmente el modelo de la esfera. En esta aproximación se han tenido en cuenta las dos intersecciones de el rayo tridimensional con la esfera y son representadas mediante una cónica dual degenerada. Ambos puntos son proyectados a continuación según un modelo de camera proyectiva que da como resultado dos puntos en la imagen $\hat{\mathbf{x}}_{\pm}$ de los cuales uno es físicamente posible. Como se ha mencionado anteriormente este modelo es válido para cualquier sistema catadióptrico central, encapsulando el tipo de espejo y su geometría en el parámetro ξ , que es la distancia entre la centro óptico virtual y el centro de la esfera.

Este enfoque usa las siguientes expansiones: de vector-3 $\hat{\mathbf{x}}$ a vector 6 $\tilde{\mathbf{x}}$ en la imagen y de vector-4 \mathbf{X} a vector-10 $\tilde{\mathbf{X}}$ en el espacio. La extensión de una matriz A es denotada por \tilde{A} .

G.2. Matriz de Proyección Genérica

Un punto tridimensional es matemáticamente proyectado sobre dos puntos de la imagen que pueden ser representados vía la cónica dual degenerada generada por ellos. Estos puntos son $\hat{\mathbf{x}}_+$ y $\hat{\mathbf{x}}_-$ y la cónica dual es dada por

$$\Omega \sim \hat{\mathbf{x}}_+ \hat{\mathbf{x}}_-^t + \hat{\mathbf{x}}_- \hat{\mathbf{x}}_+^t \quad (\text{G.1})$$

La triangular inferior de la cónica es calculada utilizando las coordenadas extendidas del punto tridimensional, parámetros intrínsecos y extrínsecos.

$$\mathbf{v}_{sym}(\Omega) \sim \tilde{H}_{c6x6} \mathbf{X}_\xi \tilde{R}_{6x6} \left(I_6 \quad T_{6x4} \right) \tilde{\mathbf{X}}_{10} \quad (\text{G.2})$$

Donde, R representa la rotación de la cámara catadióptrica, \mathbf{X}_ξ y $T_{6 \times 4}$ dependen únicamente del parámetro del espejo ξ y de la posición de la cámara catadióptrica $\mathbf{C} = (t_x, t_y, t_z)$ respectivamente.

$$\mathbf{X}_\xi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi^2 & 0 & -\xi^2 & 0 & 0 & (1 - \xi^2) \end{pmatrix}$$

De ese modo P_{cata} , una matriz de proyección catadióptrica de tamaño 6x10, puede ser descrita como el producto de una matriz dependiente únicamente de parámetros intrínsecos A_{cata} y otra dependiente de parámetros extrínsecos T_{cata} .

$$P_{cata} = \underbrace{\tilde{H}_c \mathbf{X}_\xi}_{A_{cata}} \underbrace{\tilde{R}_{6x6} \left(I_6 \quad T_{6x4} \right)}_{T_{cata}} \quad (\text{G.3})$$

G.3. Calculo de la Matriz de Proyección Genérica

El procedimiento para calcular la Matriz de Proyección Genérica es el mismo que en el caso perspectivo [11]. La única diferencia se da en que ambos puntos, los

2D y los 3D están extendidos. Por lo tanto, la relación entre las correspondencias y la matriz de proyección se expresa como sigue

$$\left(\widetilde{[\mathbf{x}]_x} \otimes \tilde{\mathbf{X}} \right) \mathbf{p}_{cata} = \mathbf{0}_6 \quad (\text{G.4})$$

El vector-60 \mathbf{p}_{cata} contiene los 60 coeficientes de \mathbf{P}_{cata} . Apilando estas ecuaciones para n correspondencias 3D-2D se obtiene un sistema de ecuaciones de tamaño $6nx60$, que puede ser resuelto por mínimos cuadrados. El mínimo número de correspondencias requeridas es 20: una matriz antisimétrica de tamaño $3x3$ tiene por definición rango 2, su correspondiente extendida rango 3. Por ello cada correspondencia aporta 3 restricciones lineales independientes.

G.4. Descomposición de la Matriz de Proyección Genérica

Para descomponer \mathbf{P}_{cata} en parámetros intrínsecos y extrínsecos como en la ecuación G.3 se debe tener en cuenta únicamente la submatriz superior izquierda $6x6$ de \mathbf{P}_{cata} . Esta matriz se denomina \mathbf{P}_s y es definida por $\mathbf{P}_s \sim \tilde{\mathbf{H}}_c \mathbf{X}_\xi \tilde{\mathbf{R}}$. Si se define $\mathbf{M} = \mathbf{P}_s \mathbf{D}^{-1} \mathbf{P}_s^T$ y tras aplicar propiedades propias de las matrices extendidas se consigue eliminar la matriz de rotación.

$$\mathbf{M} \sim \tilde{\mathbf{H}}_c \mathbf{X}_\xi \tilde{\mathbf{R}} \mathbf{D}^{-1} \tilde{\mathbf{R}}^T \mathbf{X}_\xi^T \tilde{\mathbf{H}}_c^{-1} = \tilde{\mathbf{H}}_c \mathbf{X}_\xi \mathbf{D}^{-1} \mathbf{X}_\xi^T \tilde{\mathbf{H}}_c^T \quad (\text{G.5})$$

Los parámetros intrínsecos: (ξ, γ, u_0, v_0) parámetro del espejo, distancia focal y las coordenadas de el punto principal de la cámara perspectiva respectivamente son extraídas de los elementos de la matriz M_{ij} .

$$u_0 = \frac{M_{46}}{M_{66}} \quad v_0 = \frac{M_{56}}{M_{66}} \quad \xi = \sqrt{\frac{\frac{M_{16}}{M_{66}} - u_0^2}{-2\left(\frac{M_{44}}{M_{66}} - u_0^2\right)}}$$

$$\gamma = \sqrt{2 \left(2\xi^4 + (1 + \xi^2)^2 \right) \left(\frac{M_{44}}{M_{66}} - u_0^2 \right)}$$

Una vez que la matriz de parámetros intrínseca \mathbf{A}_{cata} se ha extraído de la matriz de proyección, la submatriz $6x10$ correspondiente a \mathbf{T}_{cata} se calcula multiplicando \mathbf{P}_{cata} por la inversa de \mathbf{A}_{cata} .

$$\mathbf{T}_{cata} = \tilde{\mathbf{R}}_{6 \times 6} (\mathbf{I}_6 \mathbf{T}_{6 \times 4}) \sim \left(\tilde{\mathbf{H}}_c \mathbf{X}_\xi \right)^{-1} \mathbf{P}_{cata} \quad (\text{G.6})$$

La submatriz superior izquierda de tamaño $6x6$ de \mathbf{T}_{cata} corresponde con la matriz de rotación estimada $\tilde{\mathbf{R}}_{est}$. A partir de esta matriz se pueden estimar los

ángulos de rotación α , β y φ . Como se está trabajando con una matriz de rotación extendida el proceso de extracción no resulta trivial, pero se simplifica una vez que uno de los ángulos ha sido calculado.

Una vez que se han estimado los parámetros intrínsecos e extrínsecos, éstos son utilizados como semilla inicial de un proceso no-lineal. Para este proceso se incorporan ciertos parámetros adicionales que no se incluían en el modelo de la esfera. Estos parámetros parámetros de distorsión radial y tangencial que son inicializados a cero. Este enfoque usa dos parámetros por cada tipo de distorsión. El criterio de minimización es la raíz cuadrática media del residuo de la distancia entre el punto medido en la imagen y su correspondiente reproyección.

Anexo H

Enfoque Distorsión-Patrón2D

En este enfoque [8] el único modelo asumido es que la función de proyección puede ser descrita como una expansión por serie de Taylor. Los coeficientes se estiman resolviendo un problema de minimización por mínimos cuadrados en dos etapas. Ésto hace que no se requiera ningún conocimiento a priori, ni modelo del sensor omnidireccional. Por ello, este enfoque asume el hecho de que la imagen omnidireccional es un caso particular de una imagen distorsionada y que esta distorsión se puede calibrar de forma empírica. Este enfoque hace uso de una serie de imágenes de un patrón 2D en distintas posiciones. La precisión depende del número de imágenes usado así como del grado de el polinomio.

H.1. Modelo de la Cámara

En el modelo general de cámara omnidireccional, se distinguen dos referencias: el plano de imagen de la cámara (x', y') y el plano del sensor (x, y) . Todas las coordenadas se expresan en el sistema de referencia situado en O, con el eje del sensor alineado según el eje Z. Sea X un punto de la escena se denomina $\mathbf{x}'' = (x'' \ y'')^t$ a su proyección sobre el plano sensor y $\mathbf{u}' = (x' \ y')^t$ a su imagen en el plano de la cámara. Los dos sistemas están relacionados entre si por una transformación afín. De este modo $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}' + \mathbf{t}$, donde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ y $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^{2 \times 1}$. Esta transformación puede ser sustituida por un factor de escala α obteniéndose una relación mas simple entre los dos sistemas. La función de proyección g , engloba la relación entre un punto x'' en el plano del sensor y el vector \mathbf{p} que define la dirección de la recta que une el origen del sistema de referencia O con el punto de la escena \mathbf{X} . Entonces, el modelo completo de una cámara omnidireccional es

$$\lambda \mathbf{p} = \lambda g(\mathbf{x}'') = \lambda g(\alpha \mathbf{x}') = \mathbf{P}\mathbf{X} \quad \lambda > 0 \quad (\text{H.1})$$

donde $\mathbf{X} \in \mathfrak{R}^4$ está expresado en coordenadas homogéneas, $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}^{3 \times 4}$ es la matriz de proyección perspectiva. La función g tiene la siguiente forma

$$g(\mathbf{x}') = \begin{pmatrix} x' & y' & f(x', y') \end{pmatrix}^T \quad (\text{H.2})$$

y f es definido como

$$f(x', y') = a_0 + a_1 \rho' + a_2 \rho'^2 + \dots + a_n \rho'^m \quad (\text{H.3})$$

donde ρ' es la distancia euclidea en la referencia de la imagen. Dado que g es una función lineal $g(\alpha \mathbf{u}') = \alpha g(\mathbf{u}')$. Reescribiendo la ecuación H.1 se obtiene

$$\lambda \mathbf{p} = \lambda \alpha g(\mathbf{x}') = \lambda \alpha \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ a_0 + \dots + a_n \rho'^m \end{bmatrix} = \mathbf{P} \mathbf{X} \quad (\text{H.4})$$

El factor α se puede integrar directamente con el factor de profundidad λ . Por ello, para calibrar la cámara omnidireccional se deben estimar los $n+1$ parámetros (a_0, a_1, \dots, a_n) correspondientes a los coeficientes de la función f .

H.2. Calibración de la Cámara

Durante el procedimiento de calibración, un patrón plano de geometría conocida se muestra a la cámara en distintas posiciones desconocidas, las cuales se pueden describir respecto del sistema de coordenadas del sensor mediante una matriz de rotación $\mathbf{R} = [\mathbf{r}_1 \ \mathbf{r}_2 \ \mathbf{r}_3]$ y una traslación \mathbf{t}_e , los parámetros extrínsecos. Sea I^i una imagen en la que se observa el patrón de calibración, $\mathbf{M}_{ij} = [X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}]$ las coordenadas 3D de los puntos en el sistema de coordenadas propio del patrón y $\mathbf{x}_{ij} = (x_{ij} \ y_{ij})^T$ las coordenadas de los correspondientes puntos en el plano de la imagen. Si se asume que el patrón es plano sin pérdida de generalidad $Z_{ij} = 0$. La ecuación H.4 se convierte en:

$$\lambda_{ij} \mathbf{p}_{ij} = \mathbf{P}^i \mathbf{X} = [\mathbf{r}_1^i \ \mathbf{r}_2^i \ \mathbf{r}_3^i \ \mathbf{t}^i] \begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = [\mathbf{r}_1^i \ \mathbf{r}_2^i \ \mathbf{t}^i] \begin{bmatrix} X_{ij} \\ Y_{ij} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{H.5})$$

Para resolver la calibración de la cámara los parámetros extrínsecos deben ser determinados para cada posición y orientación de el patrón de calibración.

H.2.1. Resolución de los Parámetros Extrínsecos de la Cámara

El primer paso es eliminar la dependencia con el factor de escala y profundidad λ_{ij} . Ésto se resuelve multiplicando ambos lados de la ecuación H.5 por \mathbf{p}_{ij} . Si se tiene en cuenta una observación particular del patrón de calibración, cada punto \mathbf{p}_j de el patrón aporta tres ecuaciones homogéneas.

$$v_j (r_{31}X_j + r_{32}Y_j + t_3) - f(\rho_j) (r_{21}X_j + r_{22}Y_j + t_2) = 0 \quad (\text{H.6})$$

$$f(\rho_j) (r_{11}X_j + r_{12}Y_j + t_1) - u_j (r_{31}X_j + r_{32}Y_j + t_3) = 0 \quad (\text{H.7})$$

$$u_j (r_{21}X_j + r_{22}Y_j + t_2) - v_j (r_{11}X_j + r_{12}Y_j + t_1) = 0 \quad (\text{H.8})$$

Donde X_j, Y_j, Z_j, u_j y v_j son conocidas. La ecuación H.8 es la única de las tres que es lineal e involucra a los parámetros $r_{11}, r_{12}, r_{21}, r_{22}, t_1, t_2$. Por ello, apilando todas las entradas desconocidas de la ecuación H.8 en un vector, esta ecuación se reescribe para m puntos de el patrón de calibración como un sistema lineal de ecuaciones que puede ser resuelto por descomposición de valores singulares (SVD). El parámetro t_3 es calculado en el siguiente paso.

$$\mathbf{M}\mathbf{H} = \mathbf{0} \quad \text{donde } \mathbf{H} = (r_{11} \ r_{12} \ r_{21} \ r_{22} \ t_1 \ t_2)^T$$

H.2.2. Resolución de los Parámetros Intrínsecos de la Cámara

Una vez que se han calculado los parámetros extrínsecos, éstos se introducen en las ecuaciones H.6 y H.7 para calcular los parámetros intrínsecos $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ y t_3 . Todas las variables desconocidas de las ecuaciones H.6 y H.7 se apilan en un vector y las ecuaciones se reescriben como un sistema de ecuaciones lineal. En este paso se incorporan las k observaciones del patrón de calibración.

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_1\rho_1 & \cdots & A_1\rho_1^n & -v_1 & 0 & \cdots & 0 \\ C_1 & C_1\rho_1 & \cdots & C_1\rho_1^n & -u_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_k & A_k\rho_k & \cdots & A_k\rho_k^n & 0 & 0 & \cdots & -v_k \\ C_k & C_k\rho_k & \cdots & C_k\rho_k^n & 0 & 0 & \cdots & -u_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \\ t_3^1 \\ \vdots \\ t_3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_1 \\ D_1 \\ \vdots \\ B_k \\ D_k \end{pmatrix}$$

donde

$$A_i = r_{21}^i X^i + r_{22}^i Y^i + t_2^i$$

$$B_i = v_i (r_{31}^i X^i + r_{32}^i Y^i)$$

$$C_i = r_{11}^i X^i + r_{12}^i Y^i + t_1^i$$

$$D_i = u_i (r_{31}^i X^i + r_{32}^i Y^i)$$

Finalmente se obtiene una solución por mínimos cuadrados del sistema sobre-dimensionado mediante una pseudoinversa. Después de estos dos pasos la cámara está calibrada. Aunque los autores no hacen mención a ello, después de este proceso lineal se realiza una optimización no-lineal usando el algoritmo de Gauss-Newton.

Anexo I

Geometría Projectiva

El espacio euclídeo utilizado habitualmente para la representación de puntos en dos y tres dimensiones plantea una serie de limitaciones a la hora de trabajar con propiedades proyectivas. Una de ellas es por ejemplo que una operación matricial permite escalar y rotar un vector pero no trasladarlo. Las coordenadas homogéneas que se introducen a continuación plantean un sobredimensionado del espacio representado introduciendo la transformación afín (rotación, escalado y traslación) y transformaciones proyectivas.

I.1. Coordenadas Homogéneas en el Plano Projectivo P^2

I.1.1. Representación de Puntos Bidimensionales

Un punto (x, y) se representa por $\mathbf{x} = \lambda (x \ y \ 1)^T \forall \lambda \neq 0$. El punto $\mathbf{x} = (x_1 \ x_2 \ x_3)^T$ corresponde al punto $(\frac{x_1}{x_3} \ \frac{x_2}{x_3})$ si $x_3 \neq 0$ o a un punto del infinito en la dirección $(x_1 \ x_2)$ si $x_3 = 0$.

I.1.2. Representación de Rectas Bidimensionales

La ecuación de la recta $\lambda(ax + by + c) = 0 \forall \lambda \neq 0$ se puede expresar como $\mathbf{l}^T \mathbf{x} = 0$ donde $\mathbf{l} = \lambda (a \ b \ c)^T \forall \lambda \neq 0$ es una representación en coordenadas de la recta.

Notese que una triada puede representar tanto un punto como una recta existiendo una dualidad entre punto y recta. $\mathbf{l}^T \mathbf{x} = 0, \mathbf{x}^T \mathbf{l} = 0$. n puntos definen una recta si cumplen el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{l} = 0$$

que se puede resolver por descomposición en valores singulares (SVD). La dualidad entre recta y punto permite calcular la intersección de rectas mediante el sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{l}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{l}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0$$

El caso particular de recta que pasa por dos puntos se puede calcular con el producto vectorial.

$$\mathbf{l} = \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2$$

Y el caso particular de intersección de dos rectas se calcula como

$$\mathbf{x} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$$

I.1.3. Representación de Cónicas Bidimensionales

Sea la ecuación de una cónica en el plano $\lambda(ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f) = 0$ $\forall \lambda \neq 0$ puede ser representada como $\lambda(\mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x}) = 0$ siendo Ω la representación matricial de la cónica.

$$\Omega = \begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{pmatrix}$$

Si expresamos la conica como un vector $\mathbf{c} = (a \ b \ c \ d \ e \ f)$ se pueden estimar los coeficientes de la cónica a partir de al menos 5 puntos que lo definen resolviendo el sistema

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^2 & x_n y_n & y_n^2 & x_n & y_n & 1 \end{pmatrix} \mathbf{c} = 0$$

donde $n \geq 5$ es el número de puntos.

Se define Ω^* como la conica dual que cumple $\lambda(\mathbf{l}^T \Omega^* \mathbf{l}) = 0 \ \forall \lambda \neq 0$ donde la recta \mathbf{l} que cumple la ecuación es cualquier recta tangente a la cónica.

$$\Omega^* = \Omega^{-1} = \begin{pmatrix} 4fc - e^2 & ed - 2bf & be - 2cd \\ ed - 2bf & 4af - d^2 & bd - 2ae \\ be - 2cd & bd - 2ae & 4ac - b^2 \end{pmatrix}$$

En el plano proyectivo P^2 una cónica está representada por una matrix 3x3. Cuando el rango de la matrix 3x3 es menor del máximo se dice que representa a una cónica degenerada. Si $\text{rango}(\Omega) = 2$ la matrix representa dos rectas que se cortan \mathbf{l} y \mathbf{r} y puede ser definida como

$$\Omega = \mathbf{lr}^T + \mathbf{rl}^T$$

donde el producto entre un vector columna por un vector fila viene definido según la definición de producto tensorial

$$\mathbf{lr}^T = \begin{pmatrix} l_1r_1 & l_1r_2 & l_1r_3 \\ l_2r_1 & l_2r_2 & l_2r_3 \\ l_3r_1 & l_3r_2 & l_3r_3 \end{pmatrix}$$

Si el rango de la matrix es uno, las dos rectas son la misma.

I.1.4. Transformaciones Proyectivas

En el plano proyectivo P^2 las transformaciones lineales están representadas por una matrix \mathbf{H} a la que se llama transformación proyectiva y que incluye traslación, rotación, escalado y proyección.

$$\mathbf{H} = \lambda \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ v_1 & v_2 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{v}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & t_1 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{t}} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{R}} \underbrace{\begin{pmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{S}}$$

La transformación de un punto viene dada por

$$\mathbf{x}' = \mathbf{H}\mathbf{x} \quad (\text{I.1})$$

de una recta

$$\mathbf{l}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{l} \quad (\text{I.2})$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{l}'^T \mathbf{x}' = 0 \rightarrow \mathbf{l}'^T \mathbf{H}\mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{l}^T \mathbf{x} = 0 \end{array} \right\} \mathbf{l}'^T = \mathbf{l}'^T \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{l}'^T = \mathbf{l}^T \mathbf{H}^{-1} \rightarrow \mathbf{l}' = \mathbf{H}^{-T}\mathbf{l}$$

y de una cónica

$$\Omega' = H^{-T}\Omega H^{-1} \quad (I.3)$$

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{x}'^T \Omega' \mathbf{x}' = 0 \rightarrow \mathbf{x}^T H^T \Omega' H \mathbf{x} = 0 \\ \mathbf{x}^T \Omega \mathbf{x} = 0 \end{array} \right\} \Omega = H^T \Omega' H \rightarrow \Omega' = H^{-T} \Omega H^{-1}$$

I.1.5. La Recta del Infinito

La recta en el infinito se define como

$$\mathbf{l}_\infty = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y al igual que un punto en el infinito puede ser proyectada mediante una transformación proyectiva en otro plano de manera que sea visible.

I.1.6. Los Puntos Absolutos o Circulares

Se definen los puntos circulares como

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$$

y mantienen la propiedad de que son el resultado de aplicar a si mismos una transformación de similaridad (escala uniforme, rotación y traslación).

$$\mathbf{I}' = H_s \mathbf{I} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & t_x \\ s \sin \theta & s \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{se^{-i\theta}}_{\text{factor escala}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

$$\mathbf{J}' = H_s \mathbf{J} = \begin{pmatrix} s \cos \theta & -s \sin \theta & t_x \\ s \sin \theta & s \cos \theta & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \underbrace{se^{-i\theta}}_{\text{factor escala}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{J}$$

Se llaman puntos circulares porque todo círculo interseca en un punto circular.

I.1.7. El Punto Polar

Se dice que la recta \mathbf{l} es la recta polar de un punto \mathbf{x} respecto de la cónica Ω si \mathbf{l} interseca a la conica en dos puntos \mathbf{x}^+ y \mathbf{x}^- de manera que las rectas \mathbf{r}_1 pasante

por \mathbf{x}^+ y \mathbf{x} , y \mathbf{r}_2 pasante por \mathbf{x}^- y \mathbf{x} , son tangentes a la cónica.

En el plano proyectivo se calcula como:

$$\mathbf{l} = \Omega \mathbf{x}$$

Análogamente se dice que \mathbf{x} es el punto polar de \mathbf{l} respecto de Ω .

I.2. Coordenadas Homogéneas en el Espacio Proyectivo P^3

I.2.1. Representación de Puntos Tridimensionales

Un punto del espacio euclídeo $R^3 (X \ Y \ Z)$ se representa por $\mathbf{X} = \lambda (X \ Y \ Z \ 1)^T$ $\forall \lambda \neq 0$. El punto $\mathbf{x} = (X_1 \ X_2 \ X_3 \ X_4)^T$ corresponde al punto $(\frac{X_1}{X_4} \ \frac{X_2}{X_4} \ \frac{X_3}{X_4})$ si $X_4 \neq 0$ o a un punto del infinito en la dirección $(X_1 \ X_2 \ X_3)$ si $X_4 = 0$.

I.2.2. Representación de Planos Tridimensionales

La ecuación del plano $\lambda (AX + BY + CZ + D) = 0 \ \forall \lambda \neq 0$ se puede expresar como $\mathbf{\Pi}^T \mathbf{x} = 0$ donde $\mathbf{\Pi} = \lambda (A \ B \ C \ D)^T \ \forall \lambda \neq 0$ es una representación en coordenadas del plano.

Notese que un vector de cuatro componentes representa tanto un punto como un plano existiendo una dualidad entre punto y plano. $\mathbf{\Pi}^T \mathbf{x} = 0, \mathbf{x}^T \pi = 0$

n puntos definen un plano si cumplen el sistema homogéneo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{\Pi} = 0$$

que se puede resolver por descomposición en valores singulares (SVD). La dualidad entre recta y punto permite calcular la intersección de rectas mediante el sistema

$$\begin{bmatrix} \mathbf{\Pi}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{\Pi}_n^T \end{bmatrix} \mathbf{x} = 0$$

Anexo J

Procedimiento para Garantizar la Condición de SCC en un Sistema Hipercatadióptrico

Una cámara fotográfica basa su funcionamiento en conseguir que sobre cada píxel incida únicamente el rayo que une el centro óptico con el punto que se quiere proyectar. A esta propiedad se le llama unicidad del centro óptico y en una cámara perspectiva se consigue mediante la obturación de la luz con un diafragma.

En un sistema catadióptrico basado en un conjunto de cámara y espejo se debe garantizar igualmente que existe una unicidad entre cada rayo que incide en el espejo y el rayo que se refleja hacia la cámara. En su estudio sobre los sistemas catadióptricos centrales Baker y Nayar [1] han demostrado que esta propiedad se cumple únicamente utilizando espejos parabólicos, hiperbólicos o elípticos y bajo ciertas restricciones geométricas.

En el caso de los sistemas hipercatadióptricos la condición que se debe cumplir es que el centro óptico de la cámara perspectiva coincida con uno de los focos de la hipérbola generatriz siendo el otro el foco del hiperboloide de revolución que define al espejo. Se puede ver una demostración de esta característica en el Anexo B. Garantizar esta condición no es una cuestión trivial pues si bien la distancia entre los dos focos viene dada por la geometría del espejo, a menudo resulta difícil estimar donde se halla el centro óptico de la cámara perspectiva.

En este anexo se presenta una metodología que permite ajustar esta distancia como un paso previo a la calibración del sistema completo. Una vez ajustada esta distancia existen diversos métodos disponibles que permiten de una manera rápida

y eficaz obtener fácilmente todos los parámetros de calibración. El método implementado se basa en el conocimiento de cierta geometría del sistema en cuestión.

En el caso que se expone la geometría del espejo esta perfectamente definida en la documentación aportada por el fabricante. El procedimiento se basa en calcular la distancia según el eje Z del centro óptico de la cámara perspectiva al borde exterior del espejo hiperbólico. Esta distancia esta perfectamente definida por la geometría del espejo según la expresión siguiente.

$$Z_{ext} = \sqrt{a^2 \left(1 + \frac{R_{ext}^2}{b^2} \right)} + c$$

Y por otro lado a partir de la calibración de la cámara perspectiva y la proyección del borde exterior de la imagen se puede estimar esa misma distancia. El método se presenta según la secuencia siguiente.

$$Z_{ext} = \frac{R_{ext}}{r_{ext}} f$$

1. Medida con la ayuda de un calibre del diámetro exterior del espejo.
2. Cálculo de la distancia que debería darse entre el borde exterior del espejo y el centro óptico de la cámara perspectiva.
3. Estimación de la distancia focal de la cámara perspectiva mediante un método de calibración clásico.
4. Estimación mediante un programa implementado en Matlab de la distancia del borde exterior del espejo a partir de la imagen tomada por la cámara perspectiva ya montada.
5. Desplazamiento de la cámara una distancia igual a la diferencia entre la distancia medida y la calculada.

Bibliografía

- [1] S. Baker, S Nayar, A theory of single-viewpoint catadioptric image formation. IJCV 35(2) (1999) 175-196
- [2] T.Svoboda, T.Pajdla, Epipolar Geometry for Central Catadioptric Cameras, Int. J. Comput. Vision 49 (1) (2002) 23-37, ISSN 0920-5691
- [3] C. Geyer, K. Daniilidis, A Unifying Theory for Central Panoramic Systems and Practical Applications, in: ECCV(2), 445-461, 2000
- [4] J. P. Barreto, H. Araujo, Issues on the Geometry of Central Catadioptric Image Formation, Computer Vision and Pattern Recognition 2 (2001) 442, ISSN 1063-6919.
- [5] C. Mei, P. Rives, Single viewpoint omnidirectional camera calibration from planar grids, in: ICPR, 3945-3950, 2007
- [6] Y. Bastanlar, L.Puig, P.Sturm, J. Guerrero, J. Barreto, DLT-Like Calibration of Central Catadioptric Cameras, in: Proceedings of the Workshop on Omnidirectional Vision, Camera networks and Non-Classical Cameras, Marseille, France, 2008
- [7] J.P. Barreto, H. Araujo, Geometric Properties of Central Catadioptric Line Images and Their Application in Calibration, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence 27 (8) (2005) 1327-1333.
- [8] D.Scaramuzza, A. Martinelli, R. Siegwart, A Flexible Technique for Accurate Omnidirectional Camera Calibration and Structure from Motion. Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision Systems, 2006.
- [9] S.Kang, Catadioptric self-calibration, in: CVPR, 1201-1207,2000
- [10] J.P. Barreto, "General Central Projection Systems: Modeling, Calibration and Visual Servoing," PhD thesis, Univ. of Coimbra, 2003

- [11] Multiple View Geometry in Computer Vision, Richard Hartley and Andrew Zisserman
- [12] Calibration of Catadioptric Systems in practice. A comparison and evaluation, L.Puig, J. Bermudez, J.J. Guerrero (en revisión)